

Министерство образования Иркутской области
Государственное бюджетное профессиональное образовательное учреждение
Иркутской области
«Иркутский техникум транспорта и строительства»

МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ
для выполнения практических работ
по учебной дисциплине ОП.09 Техническая механика

специальность среднего профессионального образования
23.02.01 Организация перевозок и управление на транспорте (железнодорожном)

Квалификация:

техник

Форма обучения: очная

Нормативный срок обучения: 3 года 10 месяцев
на базе основного общего образования

Иркутск, 2024

Методические рекомендации для практических работ составлены на основании рабочей программы по дисциплине ОП.09 Техническая механика

Разработчик: Иринчеева Е.В., преподаватель

Рассмотрено и одобрено на заседании
ДЦК
Протокол № 9 от 28.05.2024г.
Председатель ДЦК: Е.В. Иринчеева

Содержание

Практическая работа №1: «Решение задач на равновесие сил в аналитической форме».

Практическое занятие 2 Определение главного вектора и главного момента произвольной плоской системы сил.

Практическое занятие 3 Определение реакции в опорах балочных систем с проверкой правильности решения

Практическое занятие 4 Определение центра тяжести плоских фигур

Практическое занятие № 5 «Общие теоремы динамики».

Список рекомендуемой литературы.

Практическая работа № 1 Решение задач на равновесие сил в аналитической форме

Тема: Определение усилий в стержнях простейшей стержневой конструкции от приложенной внешней нагрузки.

Цель: Изучение условия равновесия плоской системы сходящихся сил, определение усилий в стержневых конструкциях аналитическим и геометрическим (графическим) способами.

Теоретические сведения:

Систему сил, линии, действия которых расположены в одной плоскости и пересекаются в одной точке, называют плоской системой сходящихся сил.

Необходимым и достаточным условием равновесия плоской системы сходящихся сил является равенство нулю равнодействующей этой системы сил. Это условие можно выразить двумя алгебраическими равенствами:

$$\sum X_i = 0; \quad \sum Y_i = 0. \quad (1)$$

Равенства (1) выражают условие равновесия плоской системы сходящихся сил в аналитической форме и их называют уравнениями равновесия плоской системы сходящихся сил. Таким образом, для равновесия плоской системы сходящихся сил необходимо и достаточно, чтобы алгебраические суммы проекций всех сил системы на координатные оси были равны нулю.

Условие равновесия плоской системы сходящихся сил в геометрической форме выражается в условии замкнутости многоугольника данных сил.

Преимущества аналитического способа проекций перед геометрическим способом построения силового многоугольника особенно заметны в задачах на равновесие системы более трех сил (решение силового многоугольника представляет известные трудности).

Задание: Определить величину и направление реакций связей от приложенной внешней нагрузки (реакции нити и стержня принято называть усилиями). Задачу решить аналитическим и геометрическим (графическим) способами. Данные для задачи своего варианта взять из таблицы 1 и схемы на рисунке 1.

К решению задачи можно приступить после изучения темы «Условие равновесия плоской системы сходящихся сил». Необходимо твердо усвоить три способа решения задач на равновесие плоской системы сходящихся сил: аналитический, геометрический и графический. Графическую часть работы выполнить карандашом на отдельном листе формата А-4, выбрать и указать на чертеже масштаб сил, лист снабдить рамкой на расстоянии 5 мм от края. Надписи выполнять чертежным шрифтом (см. пример выполнения задания).

Методические указания к решению задачи.

При решении задачи аналитическим способом рекомендуется придерживаться следующего порядка:

1. Выделить тело (или точку), равновесие которого следует рассмотреть.
2. Изобразить активные (заданные) силы, действующие на выделенное тело.
3. Освободить тело от наложенных на него связей, заменив их действие реакциями связей (услиями), неизвестные усилия направить от узла, предположив, что стержни растянуты.
4. Выбрать положение прямоугольной системы координат. Начало координат совместить с точкой, равновесие которой будем рассматривать.

Координатные оси по возможности направлять по неизвестным силам, тогда проекция неизвестной силы на ось, перпендикулярную ей, окажется равной нулю. Благодаря этому, уменьшится число неизвестных в уравнении, равновесия, и решение его упростится.

5. Определить углы между усилиями и координатными осями, указать на чертеже.
6. Составить уравнения равновесия плоской системы сходящихся сил:

$$\sum X_i = 0; \quad \sum Y_i = 0.$$

При проектировании силы на ось следует модуль силы умножить на косинус острого угла между линией действия силы и осью независимо от того, с каким направлением оси (положительным или отрицательным) он образован.

Полученное произведение имеет знак плюс, если проектируемая сила совпадает с положительным направлением оси, и знак минус – если не совпадает.

7. Решить составленные уравнения равновесия относительно искомых величин.

При решении задачи геометрическим (графическим) способом необходимо построить замкнутый силовой многоугольник (треугольник), построение которого начинают с заданных сил, а затем достраивают неизвестные силы.

8. Решить силовой многоугольник (определить неизвестные стороны, которые представляют собой неизвестные усилия в стержнях) или, если силовой многоугольник построен в масштабе, определить искомые силы по масштабу.

Ход работы

Аналитический способ решения.

Рассмотрим равновесие шарнира ____. К нему приложена активная сила вес груза F . Отбросим связи и заменим действие связей их реакциями R_1 и R_2 .

Направим искомые усилия от узла ____, тем самым предположив стержни растянутыми. Если же в результате решения то или иное из них получится отрицательным, то это значит, что предположенное направление усилия неправильное и, следовательно, усилие является сжимающим.

Для равновесия узла ____ должна равняться нулю алгебраическая сумма проекций всех приложенных к нему сил на любые две непараллельные оси.

Совместим начало координат с точкой ____, проведем ось X по стержню ____, а ось Y перпендикулярно ей.

Составим уравнения равновесия, для системы сходящихся сил в узле B :

$$\sum X_i = 0; \underline{\hspace{15em}}$$

$$\sum Y_i = 0. \underline{\hspace{15em}}$$

После подстановки числовых значений известных величин получим

$$R_1 = \underline{\hspace{10em}} \quad R_2 = \underline{\hspace{10em}}.$$

Геометрический (графический) способ решения.

Выбираем масштаб сил _____ и строим замкнутый силовой многоугольник (треугольник). Из произвольной точки a проводим отрезок ab , параллельный и равный в принятом масштабе силе F , затем из точки a проводим прямую параллельно стержню ____, до взаимного пересечения с прямой, проведенной из точки b параллельно стержню _____. Полученный силовой треугольник замкнутый, следовательно, все стрелки в нем направлены в одну сторону по обходу силового треугольника. Направление обхода определяется направлением заданной силы F . Стороны этого треугольника ac и bc представляют собой величины и направления усилий R_1 и R_2 в стержнях конструкции соответственно. По масштабу определим $R_1 = \underline{\hspace{10em}}$ и $R_2 = \underline{\hspace{10em}}$. Совершая обход треугольника в направлении силы F , замечаем, что полученные направления реакций стержней ____ совпадают с первоначально выбранными, следовательно стержень ____ растянут (сжат), стержень ____ растянут (сжат).

Модули R_1 и R_2 . можно также определить геометрически используя

Сравним результаты двух решений и вычислим в процентах относительную погрешность графического решения по формуле:

$$\delta = \left| \frac{R_{gp} - R_{ан}}{R_{ан}} \right| \times 100\% =$$

Относительная погрешность не должна превышать 5%.

Вывод: _____

Определение усилий в стержнях конструкции
Графический способ Масштаб сил: _____

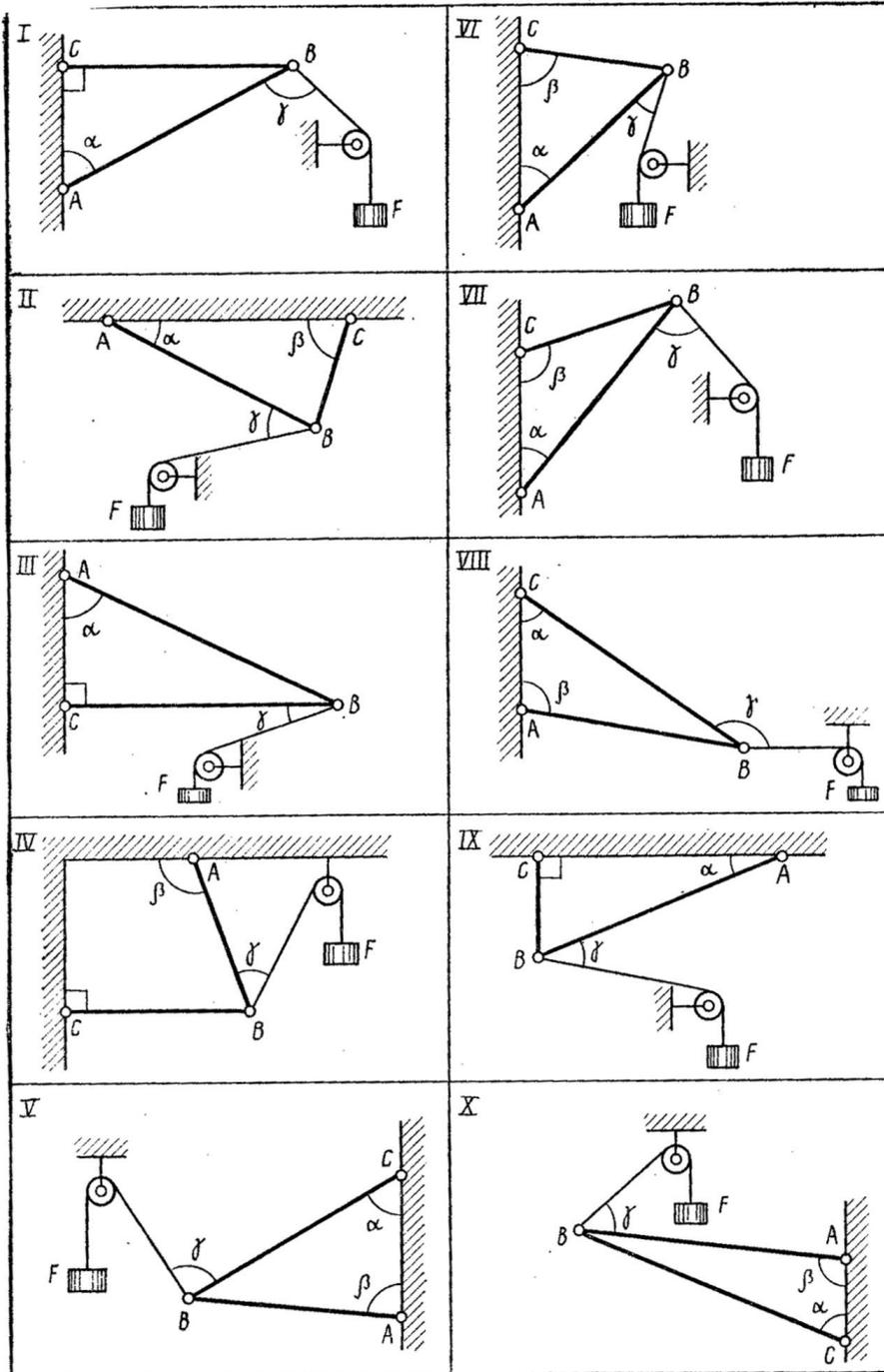


Таблица № 1

Вариант	Схема	Сила F (кН)	УГЛЫ в градусах		
			α	β	γ
1	II	50	30	60	30
Тросом 2	III	50	45	90	90
3	IV	50	90	120	45
4	VI	50	60	30	45

5	V	50	30	60	90
6	VIII	50	45	120	90
7	VII	50	45	120	90
8	X	50	30	120	60
9	IX	50	30	90	60
10	II	60	60	30	60
11	I	60	60	90	90
12	III	60	30	90	60
13	IV	60	90	120	60
14	VI	60	30	60	30
15	V	60	60	90	90
16	VIII	60	30	120	90
17	VII	60	60	120	90
18	X	60	60	60	60
19	IX	100	30	90	60
20	II	100	30	60	60
21	I	100	60	90	120
22	IV	100	90	120	30
23	III	100	60	90	30
24	VI	100	60	90	30
25	V	100	30	60	90

Пример решения задачи.

Тросом, перекинутым через блок **A**, поддерживаемый шарнирно-стержневой конструкцией **ВАС**, с постоянной скоростью поднимается груз **G**.

Определить усилия в стержнях **AB** и **AC** конструкции, пренебрегая размерами блока и трением в нем. Дано: $G = 2$ кН. $\alpha = 30^\circ$, $\beta = 60^\circ$, $\gamma = 45^\circ$.

Аналитический способ решения.

Рассмотрим равновесие шарнира **A**. Мысленно вырежем узел **A** и изобразим его со всеми действующими на него известными и искомыми силами.

Искомые усилия R_1 и R_2 направим от узла **A**, предположив, что стержни растянуты. Для равновесия узла **A** должна равняться нулю алгебраическая сумма проекций всех приложенных к нему сил на любые две непараллельные оси. Совместим начало координат с точкой **A**, проведем ось **X** по стержню **AB**, а ось **Y** перпендикулярно оси **X** вдоль стержня **AC**.

Составим уравнения равновесия, для системы сходящихся в узле **A** сил.

$$\sum X_i = 0; \quad G \cdot \cos 60^\circ - R_2 - F \cdot \cos 45^\circ = 0; \quad 2 \cdot 0,5 - R_2 - 2 \cdot 0,707 = 0;$$
$$R_2 = -0,414 \text{ кН.}$$

$$\sum Y_i = 0. \quad -R_1 - G \cdot \cos 30^\circ - F \cdot \cos 45^\circ = 0; \quad -R_1 - 2 \cdot 0,866 - 2 \cdot 0,707 = 0;$$
$$R_1 = -3,144 \text{ кН.}$$

В результате решения искомые усилия R_1 и R_2 получились отрицательными, это значит, что предположенное направление усилий неверное и, следовательно, оба стержня работают на сжатие.

Геометрический (графический) способ решения:

Рассмотрим равновесие узла **A**, из четырех сил, действующих на узел **A** известны натяжение вертикальной ветви троса, равное весу груза **G** и направленное вертикально вниз и натяжение наклонной ветви троса, которое из-за отсутствия трения в блоке равно по абсолютной величине натяжению вертикальной ветви троса ($G = F = 2$ кН.). Для определения искомых усилий.

R_1 и R_2 выбираем масштаб сил $\mu = 0,5$ кН./см. и строим замкнутый силовой многоугольник сил. Из произвольной точки **a** проводим отрезок **ав**, параллельный и равный в принятом масштабе силе **G**, из точки **в** проводим отрезок **вс**, параллельный и равный второй известной силе **F**; затем из точки **a** проводим прямую, параллельно стержню **AC**, до взаимного пересечения с прямой, проведенной из точки **с** параллельно стержню **AB**.

Полученный силовой многоугольник **авсda** замкнутый, следовательно все стрелки в нем должны идти в одну сторону по обходу силового многоугольника, причем направление этого обхода определяется направлением известных сил **G** и **F**. Стороны этого многоугольника **cd** и **da** дают величины и направления усилий R_1 и R_2 в стержнях **AC** и **AB** соответственно. По масштабу находим, что $R_1 = 3,145$ кН и $R_2 = 0,425$ кН.

Совершая обход многоугольника, замечаем, что полученные направления усилий не совпадают с первоначально выбранными, следовательно, оба стержня сжимаются.

Модули усилий R_1 и R_2 можно определить также по теореме синусов:

Рассмотрим треугольник **аве** сторона **се** $= \sqrt{2} \cdot R_2$;

По теореме синусов: $(F - \sqrt{2} \cdot R_2) / \sin 30^\circ = G / \sin 45^\circ$;

$$(2 - 1,414 R_2) \cdot 0,707 = 2 \cdot 0,5; \quad R_2 = 1,414 - 1; \quad R_2 = 0,414 \text{ кН.}$$

Из этого же треугольника запишем другое соотношение и определим \mathbf{R}_1 .

По теореме синусов: $(\mathbf{R}_1 - \mathbf{R}_2) / \sin 105^\circ = G / \sin 45^\circ$;

$\mathbf{R}_1 - \mathbf{R}_2 = 2,732$; $\mathbf{R}_1 = 2,732 + 0,414 = 3,146$ кН.

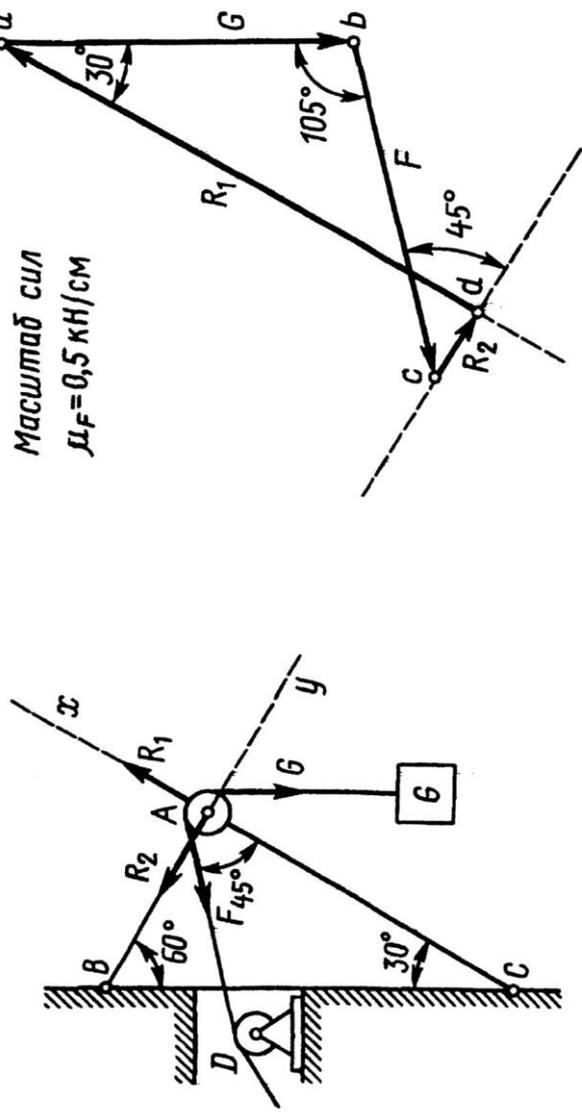
Ответ: $\mathbf{R}_1 = 3,146$ кН.

$\mathbf{R}_2 = 0,414$ кН.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ СИЛ В СТЕРЖНЯХ

Дано: $G = 2 \text{ кН}$, $\alpha = 60^\circ$, $\beta = 30^\circ$, $\gamma = 45^\circ$

Масштаб сил
 $\mu_F = 0,5 \text{ кН/см}$



Силы в стержнях:

$$R_1 = ab \cdot \mu_F = 6,29 \text{ см} \times 0,5 \text{ кН/см} = 3,145 \text{ кН},$$

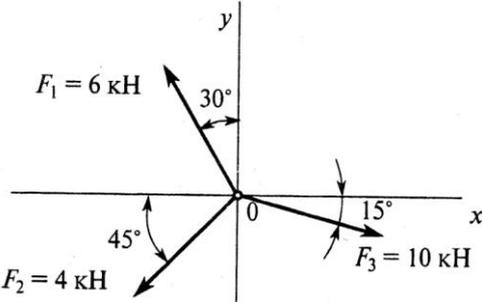
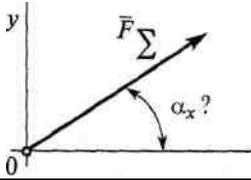
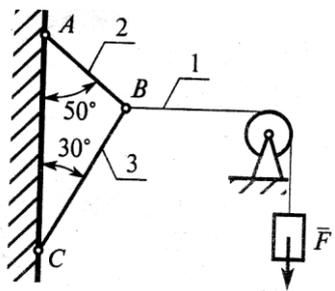
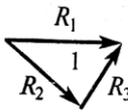
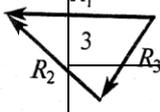
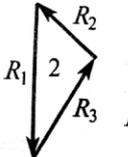
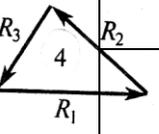
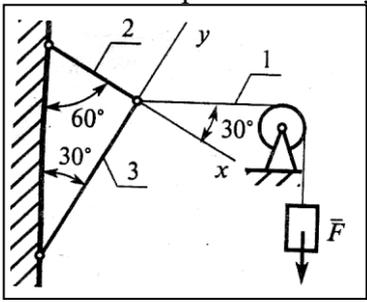
$$R_2 = cd \cdot \mu_F = 0,85 \text{ см} \times 0,5 \text{ кН/см} = 0,425 \text{ кН}.$$

Относительная погрешность:

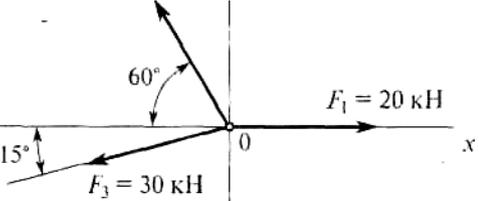
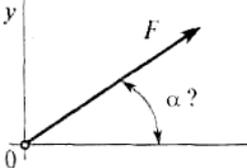
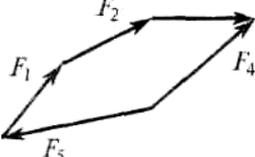
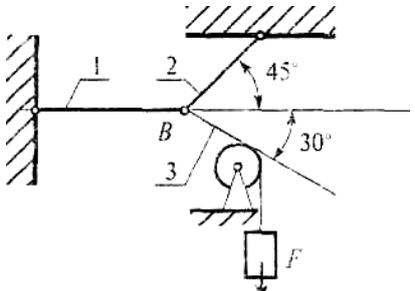
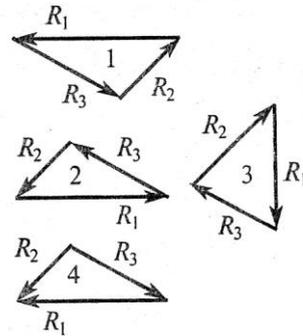
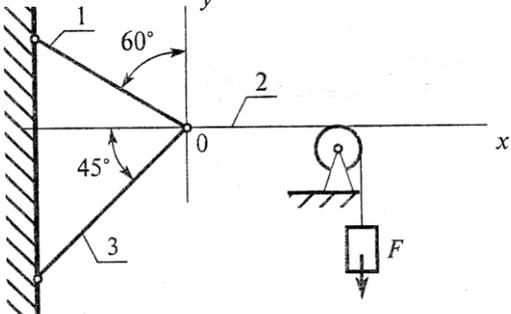
$$\delta_1 = 0, \delta_2 = \frac{0,425 - 0,414}{0,414} \cdot 100 = 2,66 \%$$

Контрольные тесты к работе 1.

Плоская система сходящихся сил

Вопросы	О т в е т ы	Код
<p>1. Определить проекцию равнодействующей на ось x</p> 	26, 54 кН	1
	3, 87 кН	2
	6, 28 кН	3
	Верный ответ не приведен	4
<p>2. Определить направление равнодействующей силы (α_x) по ее проекциям на оси x и y $F_{\Sigma x} = 25$ Н; $F_{\Sigma y} = 9,9$ Н</p> 	14° 30'	1
	64° 15'	2
	21° 40'	3
	Верный ответ не приведен	4
<p>3. Сходящаяся система 4-х сил, действующих на балку, уравновешена $F_{1y} = 16$ Н; $F_{2y} = -46$ Н; $F_{3y} = 36$ Н; $\Sigma F_{kx} = 0$ Определить величину F_{4y}</p>	16 Н	1
	- 6 Н	2
	6 Н	3
	1 Н	4
<p>4. Груз F находится в равновесии. Указать, какой из силовых треугольников для шарнира В построен верно</p> 		1
		2
		3
		4
<p>5. Груз находится в равновесии. Указать, какая система уравнений равновесия верна в этом случае</p> 	$\Sigma F_{kx} = R_1 \cos 60^\circ + R_1 = 0$ $\Sigma F_{ky} = R_3 + R_1 \cos 30^\circ = 0$	
	$\Sigma F_{kx} = R_1 \cos 30^\circ - R_2 = 0$ $\Sigma F_{ky} = R_3 + R_1 \cos 60^\circ = 0$	
	$\Sigma F_{kx} = R_1 \cos 30^\circ - R_2 = 0$ $\Sigma F_{ky} = -R_3 + R_1 \cos 60^\circ = 0$	
	Верный ответ не приведен	4

Плоская система сходящихся сил

Вопросы	Ответы	Код
<p>6. Определить величину равнодействующей силы</p> 	<p>39, 5 кН</p> <p>44, 4 кН</p> <p>19, 5 кН</p> <p>Верный ответ не приведен</p>	<p>1</p> <p>2</p> <p>3</p> <p>4</p>
<p>7. По известным проекциям на оси координат x и y определить угол наклона равнодействующей к оси Ox</p> <p>$F_{\Sigma x} = 15$ кН; $F_{\Sigma y} = 8,66$ кН</p> 	<p>30°</p> <p>20°</p> <p>60°</p> <p>75°</p>	<p>1</p> <p>2</p> <p>3</p> <p>4</p>
<p>8. Какой вектор силового многоугольника является равнодействующей силой?</p> 	<p>F2</p> <p>F4</p> <p>F5</p> <p>F1</p>	<p>1</p> <p>2</p> <p>3</p> <p>4</p>
<p>9. Груз F находится в равновесии. Указать, какой из треугольников для шарнира В построен верно</p> 		<p>1</p> <p>2</p> <p>3</p> <p>4</p>
<p>10. Груз F находится в равновесии. Указать, какая система уравнений равновесия верна в этом случае</p> 	<p>$\sum F_{kx} = R_2 - R_1 \cos 60^\circ - R_3 \cos 45^\circ = 0$</p> <p>$\sum F_{ky} = R_1 \cos 60^\circ - R_3 \cos 45^\circ = 0$</p> <hr/> <p>$\sum F_{kx} = R_2 - R_1 \cos 30^\circ - R_3 \cos 45^\circ = 0$</p> <p>$\sum F_{ky} = R_1 \cos 60^\circ - R_3 \cos 45^\circ = 0$</p> <hr/> <p>$\sum F_{kx} = R_1 \cos 30^\circ - R_3 \cos 45^\circ + R_2 = 0$</p> <p>$\sum F_{ky} = R_3 \cos 45^\circ - R_1 \cos 60^\circ = 0$</p>	<p>1</p> <p>2</p> <p>3</p> <p>Верный ответ не приведен</p>

Практическая работа №2.

Определение главного вектора и главного момента произвольной плоской системы сил.

Цель: Иметь представление о главном векторе, главном моменте, знать теорему Пуансо о приведении силы к точке приведения произвольной плоской системы сил к точке, три формы уравнений равновесия.

Уметь заменять произвольную плоскую систему сил одной силой и одной парой

Теорема Пуансо о параллельном переносе сил.

Силу можно перенести параллельно линии ее действия, при этом нужно добавить пару сил с моментом, равным произведению модуля силы на расстояние, на которое перенесена сила.

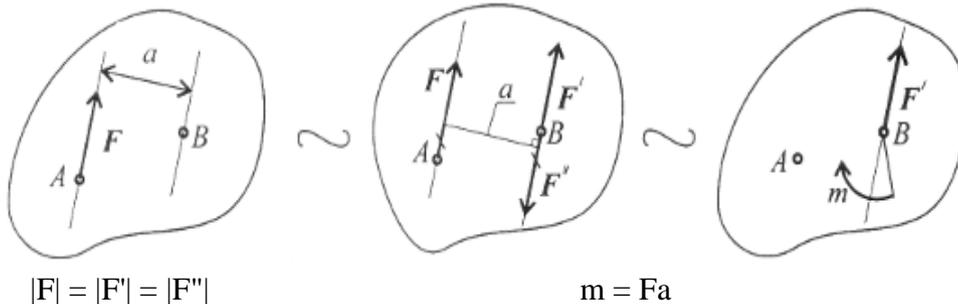


Рис.1.

Дано: сила в точке А (рис.1).

Добавим в точку В уравновешенную систему сил (F' ; F''). Образуется пара сил (F' ; F''). Получим силу в точке В и момент пары m .

Приведение к точке плоской системе произвольно расположенных сил.

Линии действия произвольной системы сил не пересекаются в одной точке, поэтому для оценки состояния тела такую систему следует упростить. Для этого все силы системы переносят в одну произвольно выбранную точку – точку приведения. Применяют теорему Пуансо. При любом переносе в точку, не лежащую на линии ее действия, добавляют пару сил.

Появившиеся при переносе пары называют присоединенными парами.

Дана плоская система произвольно расположенных сил (рис.2).

Переносим все силы в точку О. получим пучок сил в точке О, который можно заменить одной силой – главным вектором системы. Образующуюся систему пар сил можно заменить одной эквивалентной парой – главным моментом системы.

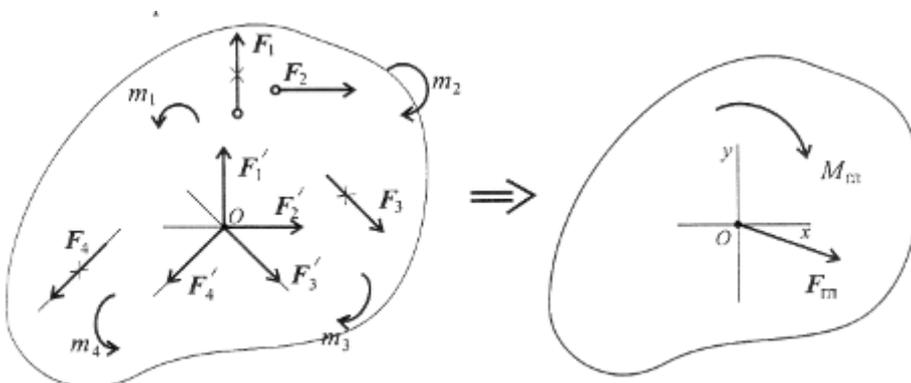


Рис.2

$$F_{\text{ГЛ}} = \sum_{\text{O}}^n F_k$$

Главный вектор равен геометрической сумме векторов произвольной плоской системой системы сил. Проецируем все силы системы на оси координат и, сложив соответствующие проекции на оси, получим проекции главного вектора.

$$F_{ГЛx} = \sum_0^n F_{kx}; \quad F_{ГЛy} = \sum_0^n F_{ky}$$

По величине проекций главного вектора на оси координат находим модуль главного вектора:

$$F_{ГЛ} = \sqrt{F_{ГЛx}^2 + F_{ГЛy}^2}.$$

Главный момент системы сил равен алгебраической сумме момента сил системы относительно точки приведения.

$$M_{ГЛo} = m_1 + m_2 + m_3 + \dots + m_n;$$

$$M_{ГЛo} = \sum_0^n m_o(F_k).$$

Таким образом, произвольная плоская система сил приводится к одной силе (главному вектору системы сил) и одному моменту (главному моменту системы сил).

Условие равновесия произвольной плоской системы сил.

1. При равновесии главный вектор системы равен нулю $F_{ГЛ} = 0$. Аналитическое определение главного вектора приводит к выводу:

$$F_{ГЛ} = \sqrt{F_{ГЛx}^2 + F_{ГЛy}^2} = 0 \implies \begin{cases} \sum_0^n F_{kx} = 0; \\ \sum_0^n F_{ky} = 0, \end{cases}$$

где F_{kx} и F_{ky} – проекции векторов на оси координат.

2. Поскольку точка приведения выбрана произвольно, ясно, что при равновесии сумма моментов сил системы относительно любой точки на плоскости должна равняться нулю:

$$M_{ГЛo} = \sum_0^n m_o(F_k) = 0 \implies \begin{cases} \sum_0^n m_A(F_k) = 0; \\ \sum_0^n m_B(F_k) = 0, \end{cases}$$

где А и В – разные точки приведения.

Условие равновесия произвольной плоской системы сил может быть сформулировано следующим образом:

Для того чтобы твердое тело под действием произвольной плоской системы сил находилось в равновесии, необходимо и достаточно, чтобы алгебраическая сумма проекций всех сил системы на любую ось равнялась нулю и алгебраическая сумма моментов всех сил системы относительно любой точки в плоскости действия сил равнялась нулю.

Получим основную форму уравнения равновесия:

$$\left\{ \begin{array}{l} \sum_0^n F_{kx} = 0; \\ \sum_0^n F_{ky} = 0; \\ \sum_0^n m_A(\mathbf{F}_k) = 0; \\ \sum_0^n m_B(\mathbf{F}_k) = 0; \\ \sum_0^n m_C(\mathbf{F}_k) = 0 \end{array} \right\} \text{уравнения моментов.}$$

Теоретически уравнений моментов можно записать бесконечное множество, практически доказано, что на плоскости можно составить только три независимых уравнения моментов и при этом три точки (центры моментов) не должны лежать на одной линии.

Таким образом, имеем пять независимых уравнений равновесия.

Практически для решения задач на плоскости достаточно трех уравнений равновесия. В каждом конкретном случае используются уравнения с одним неизвестным.

Для разных случаев используются три группы уравнений

$$\text{Первая форма уравнений равновесия: } \left\{ \begin{array}{l} \sum_0^n F_{kx} = 0; \\ \sum_0^n F_{ky} = 0; \\ \sum_0^n m_A(\mathbf{F}_k) = 0. \end{array} \right.$$

равновесия

$$\text{Вторая форма уравнений равновесия: } \left\{ \begin{array}{l} \sum_0^n F_{ky} = 0; \\ \sum_0^n m_A(\mathbf{F}_k) = 0; \\ \sum_0^n m_B(\mathbf{F}_k) = 0. \end{array} \right.$$

$$\text{Третья форма уравнений равновесия: } \left\{ \begin{array}{l} \sum_0^n m_A(\mathbf{F}_k) = 0; \\ \sum_0^n m_B(\mathbf{F}_k) = 0; \\ \sum_0^n m_C(\mathbf{F}_k) = 0. \end{array} \right.$$

Для частного случая, если уравновешена система параллельных сил, можно составить только два уравнения равновесия:

$$\sum_0^n F_{kx} = 0; \quad \sum_0^n m_A(\mathbf{F}_k) = 0.$$

Ось Ox системы координат параллельна линии действия сил.

Примеры решения задач

Пример 1. Найти момент присоединенной пары при переносе силы F_3 в точку B (рис.3) $F_1 = 10\text{кН}$; $F_2 = 15\text{кН}$; $F_3 = 18\text{кН}$; $a = 0,2\text{м}$.

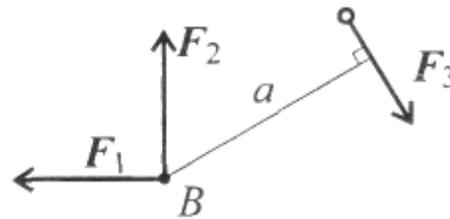


рис.3.

Решение

Используем теорему Пуансо.

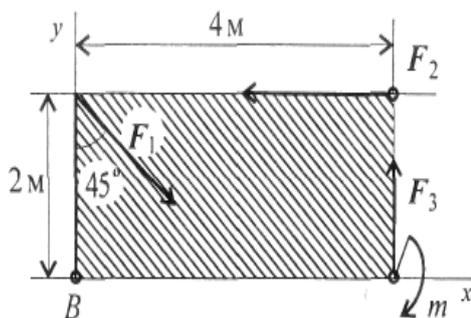
$$M_B(F_3) = 18 \cdot 0,2 = 3,6\text{кНм}.$$

Пример 2. Найти главный вектор системы (рис.4).

$F_1 = 10\text{кН}$; $F_2 = 16\text{кН}$; $F_3 = 12\text{кН}$; $m = 60\text{кНм}$.

Решение

Главный вектор равен геометрической сумме сил:



$$F_{\text{гл}x} = \sum_0^n F_{kx};$$

$$F_{\text{гл}x} = F_1 \cos 45^\circ - F_2 = -9\text{кН};$$

$$F_{\text{гл}y} = \sum_0^n F_{ky};$$

$$F_{\text{гл}y} = -F_1 \cos 45^\circ + F_3 = 5\text{кН};$$

$$F_{\text{гл}} = \sqrt{F_{\text{гл}x}^2 + F_{\text{гл}y}^2};$$

$$F_{\text{гл}} = \sqrt{(-9)^2 + 5^2} \approx 10\text{кН}.$$

Рис.4.

Практическая работа №3

«Определение реакции в опорах балочных систем с проверкой правильности решения»

Цель: научиться определять реакции в опорах балочных систем с проверкой правильности решения

Последовательность решения задачи

1. Балку освободить от связей (связи) и их (его) действие заменить силами реакций.
2. Выбрать координатные оси.
3. Составить и решить уравнения равновесия.

Реакции опор можно определить, исходя из трех форм уравнений равновесия:

$$\begin{array}{lll} \text{a)} & \sum F_{ix} = 0; & \text{б)} & \sum F_{iy} = 0; & \text{в)} & \sum M_A = 0; \\ & \sum F_{iy} = 0; & & \sum M_A = 0; & & \sum M_B = 0; \\ & \sum M_A = 0; & & \sum M_B = 0; & & \sum M_C = 0. \end{array}$$

4. Проверить правильность решения задачи. Проверку необходимо производить по тому уравнению равновесия, которое не было использовано при решении данной задачи (задача решена правильно лишь в том случае, если после постановки значений активных и реактивных сил в уравнение равновесия выполняется условие равновесия).

5. Сделать анализ решенной задачи (если при решении задачи реакции опор или реактивный момент получается отрицательным, то их действительное направление противоположно принятому).

Пример 1. Определить реакции опор балки, если известно

$F = 20 \text{ кН}$, $M = 10 \text{ кН}\cdot\text{м}$, $q = 1 \text{ кН/м}$ (рис. 1).

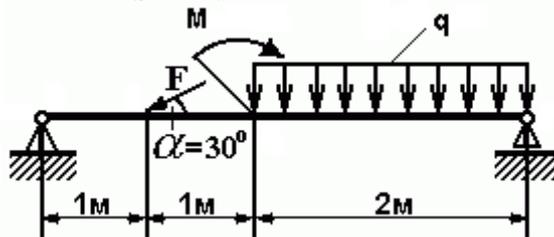


Рис. 1 - Схема задачи

Решение:

1. Изображаем балку вместе с нагрузками.
2. Выбираем расположение координатных осей, совместив ось X с балкой, а ось Y направив перпендикулярно оси X .
3. Производим необходимые преобразования заданных активных сил: силу, накопленную к оси балки под углом α , заменяем двумя взаимно перпендикулярными составляющими

$$F_x = F \cdot \cos 30^\circ = 20 \cdot 0,866 = 17,32 \text{ кН}$$

$$F_y = F \cdot \cos 60^\circ = 20 \cdot 0,5 = 10 \text{ кН},$$

а равномерно распределенную нагрузку - её равнодействующей

$$Q = q \cdot CD = 1 \cdot 2 = 2 \text{ кН},$$

Равнодействующая Q приложена в середине участка CD , в точке K (рис. 2).

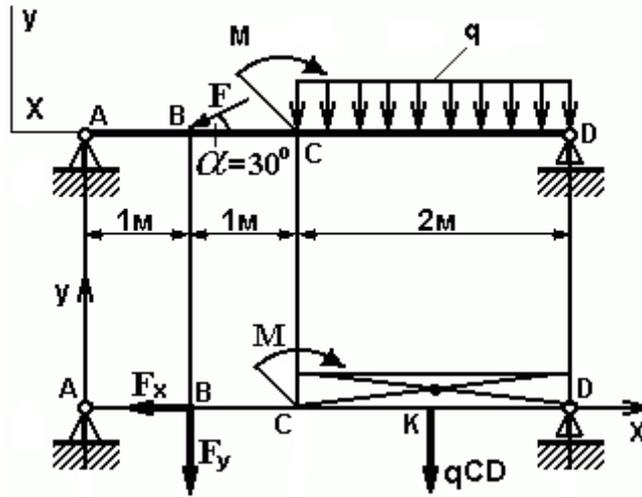


Рис. 2 - Схема преобразования заданных активных сил

4. Освобождаем балку от опор, заменив их опорными реакциями, направленными вдоль выбранных осей координат (рис 3).

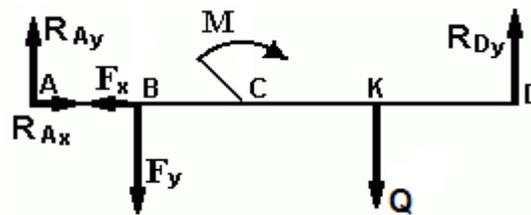


Рис. 3 - Схема реакций балки

5. Составляем уравнения равновесия статики для произвольной плоской системы сил таким образом и в такой последовательности, чтобы решением каждого из этих уравнений было определение одной из неизвестных реакций опор и определяем неизвестные реакции опор.

$$\sum M_A = 0; F_y \cdot AB + M + Q \cdot AK - R_{Dy} \cdot AD = 0 \quad (1)$$

$$\sum M_D = 0; R_{Ay} \cdot AD - F_y \cdot BD + M - Q \cdot KD = 0 \quad (2)$$

$$\sum F_{ix} = 0; R_{Ax} - F_x = 0 \quad (3)$$

6. Определяем реакции опор балок R_{Ay} , R_{Dy} и R_{Ax} решая уравнения.

Из уравнения (1) получаем

$$R_{Dy} = F_y \cdot AB + M + Q \cdot AK / AD = 10 \cdot 1 + 10 + 2 \cdot 3 / 4 = 6,5 \text{ кН}$$

Из уравнения (2) получаем

$$R_{Ay} = F_y \cdot BD - M + Q \cdot KD / AD = 10 \cdot 3 - 10 + 2 / 4 = 5,5 \text{ кН}$$

Из уравнения (3) получаем

$$R_{Ax} = F_x = F \cdot \cos 30^\circ = 20 \cdot 0,866 = 17,32 \text{ кН}$$

7. Проверяем правильность найденных результатов:

$$\sum F_{iy} = 0; R_{Ay} - F_y - Q + R_{Dy} = 5,5 - 10 - 2 + 6,5 = 0$$

Условие равновесия $\sum F_{iy} = 0$ выполняется, следовательно, реакции опор найдены верно.

Пример 2. Определить реакции заделки, если известно

$F = 20 \text{ кН}$, $M = 10 \text{ кН}\cdot\text{м}$, $q = 1 \text{ кН/м}$ (рис. 4).

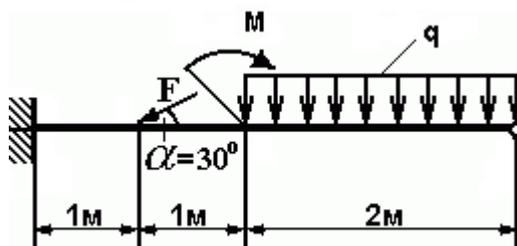


Рис. 4 - Схема задачи

Решение:

1. Изображаем балку вместе с нагрузками.

2. Выбираем расположение координатных осей, совместив ось X с балкой, а ось Y направив перпендикулярно оси X .

3. Производим необходимые преобразования заданных активных сил: силу, накопленную к оси балки под углом α , заменяем двумя взаимно перпендикулярными составляющими

$$F_x = F \cdot \cos 30^\circ = 20 \cdot 0,866 = 17,32 \text{ кН}$$

$$F_y = F \cdot \sin 30^\circ = 20 \cdot 0,5 = 10 \text{ кН},$$

а равномерно распределенную нагрузку - её равнодействующей

$$Q = q \cdot CD = 1 \cdot 2 = 2 \text{ кН},$$

Равнодействующая Q приложена в середине участка CD , в точке K (рис. 5).

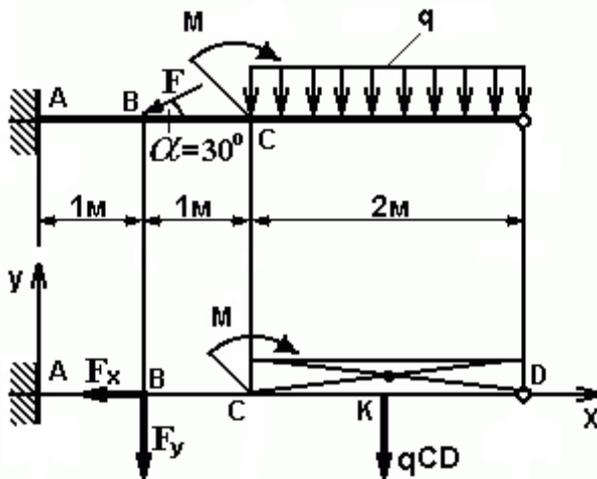


Рис. 5 - Схема преобразования заданных активных сил

4. Освобождаем балку от заделки, заменив её опорными реакциями, направленными вдоль выбранных осей координат и реактивным моментом (моментом заделки, M_3) (рис 6).

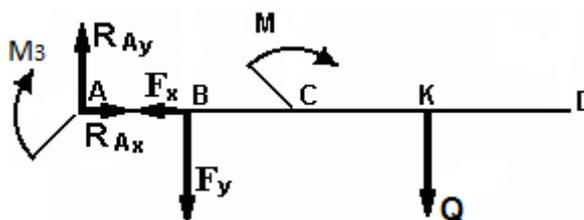


Рис. 6 - Схема реакций балки

5. Составляем уравнения равновесия статики для произвольной плоской системы сил таким образом и в такой последовательности, чтобы решением каждого из этих уравнений было определение одной из неизвестных реакций опор и определяем неизвестные реакции опор.

$$\sum M_A = 0; \quad M_3 + F_y \cdot AB + M + Q \cdot AK = 0 \quad (1)$$

$$\sum M_B = 0; \quad M_3 + R_{Ay} \cdot AB + M + Q \cdot BK = 0 \quad (2)$$

$$\sum F_{ix} = 0; \quad R_{Ax} - F_x = 0 \quad (3)$$

6. Определяем реакции опор балки R_{Ax} , R_{Ay} и момента заделки M_3 решая уравнения.

Из уравнения (1) получаем

$$M_3 = - F_y \cdot AB - M - Q \cdot AK = - 10 \cdot 1 - 10 - 2 \cdot 3 = - 26 \text{ кН}\cdot\text{м}$$

Из уравнения (2) получаем

$$R_{Ay} = - Q \cdot BK - M - M_3 / AB = - 2 \cdot 2 - 10 - (-26) / 1 = 12 \text{ кН}$$

Из уравнения (3) получаем

$$R_{Ax} = F_x = F \cdot \cos 30^\circ = 20 \cdot 0,866 = 17,32 \text{ кН}$$

7. Проверяем правильность найденных результатов:

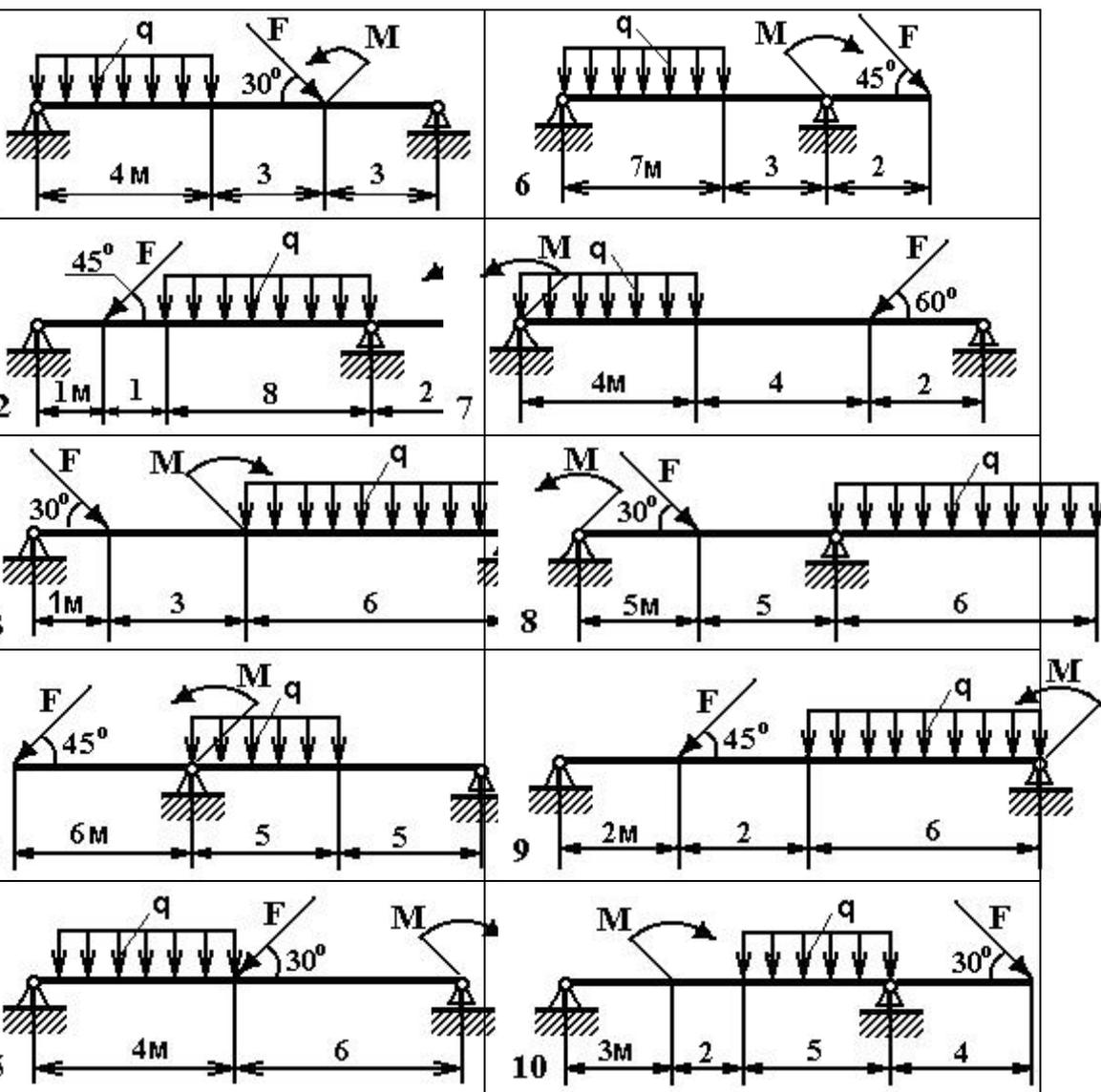
$$\sum F_{iy} = 0; \quad R_{Ay} - F_y - Q = 12 - 10 - 2 = 0$$

Условие равновесия $\sum F_{iy} = 0$ выполняется, следовательно, реакции опоры найдены верно.

Задача 1. Определить реакции опор двухопорной балки (рисунок 7). Данные своего варианта взять из таблицы 1

Таблица 1 - Исходные данные

Номер схемы на рисунке 7										F	q	M
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10			
Варианты										кН	кН/м	кНм
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	20	2	28
11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	30	4	8
21	22	23	24	25	26	27	28	29	30	40	2	24



Задача 2. Определить реакции заделки (рисунок 8). Данные своего варианта взять из таблицы 1

Таблица 1 - Исходные данные

Номер схемы на рисунке 8										F	q	M
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10			
Варианты										кН	кН/м	кНм

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	16	2	38
11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	22	2	12
21	22	23	24	25	26	27	28	29	30	34	2	14

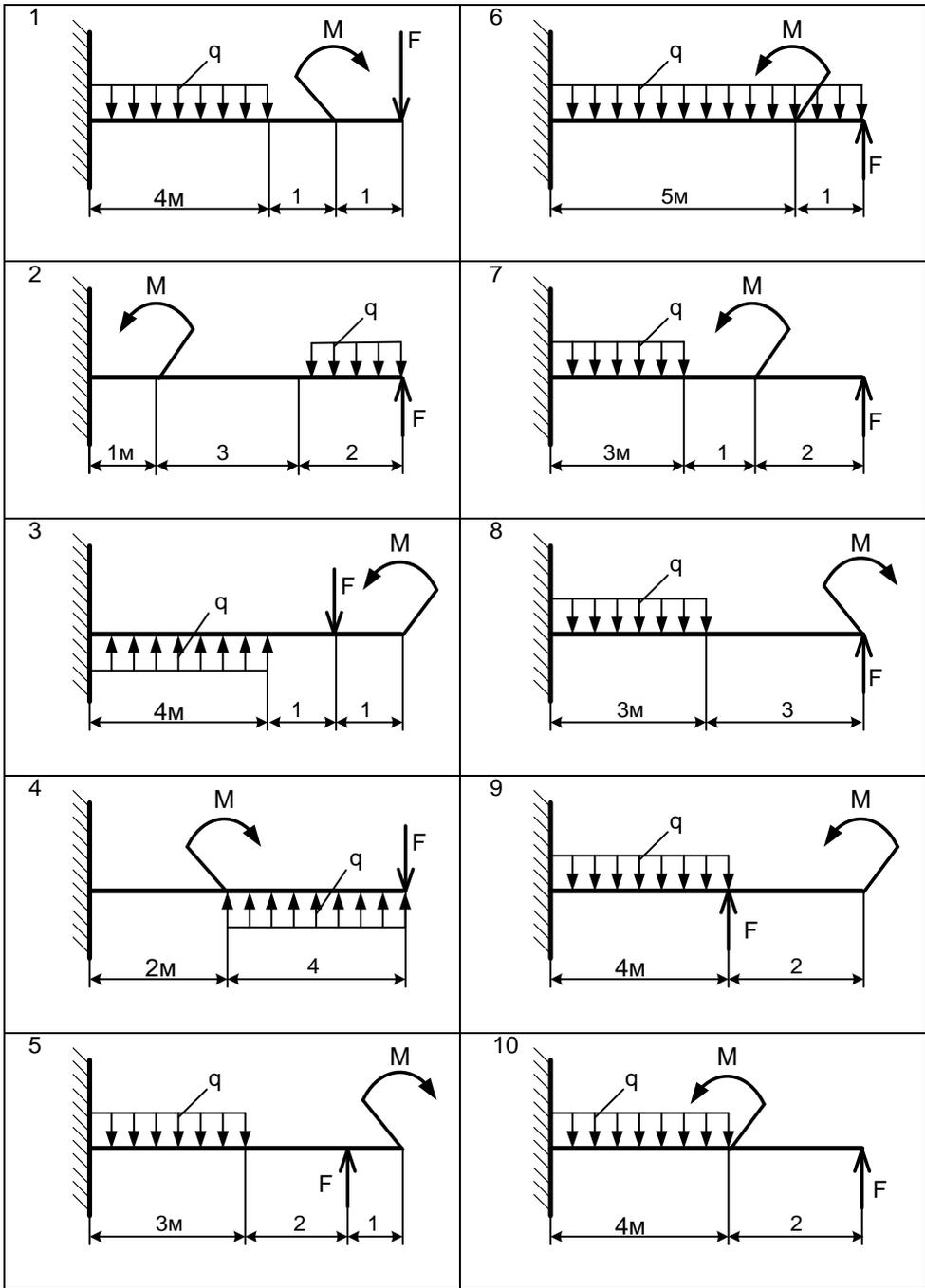
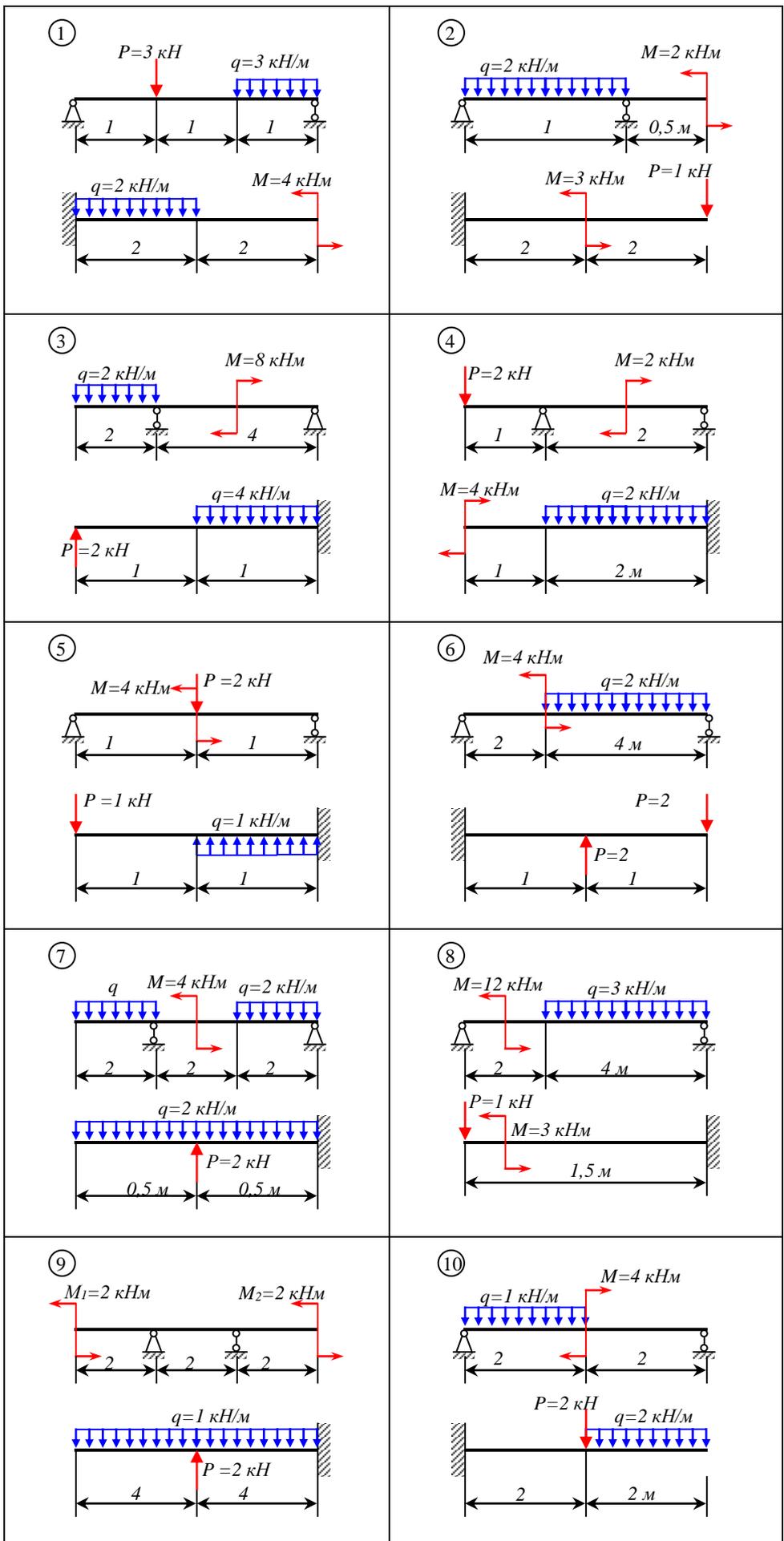
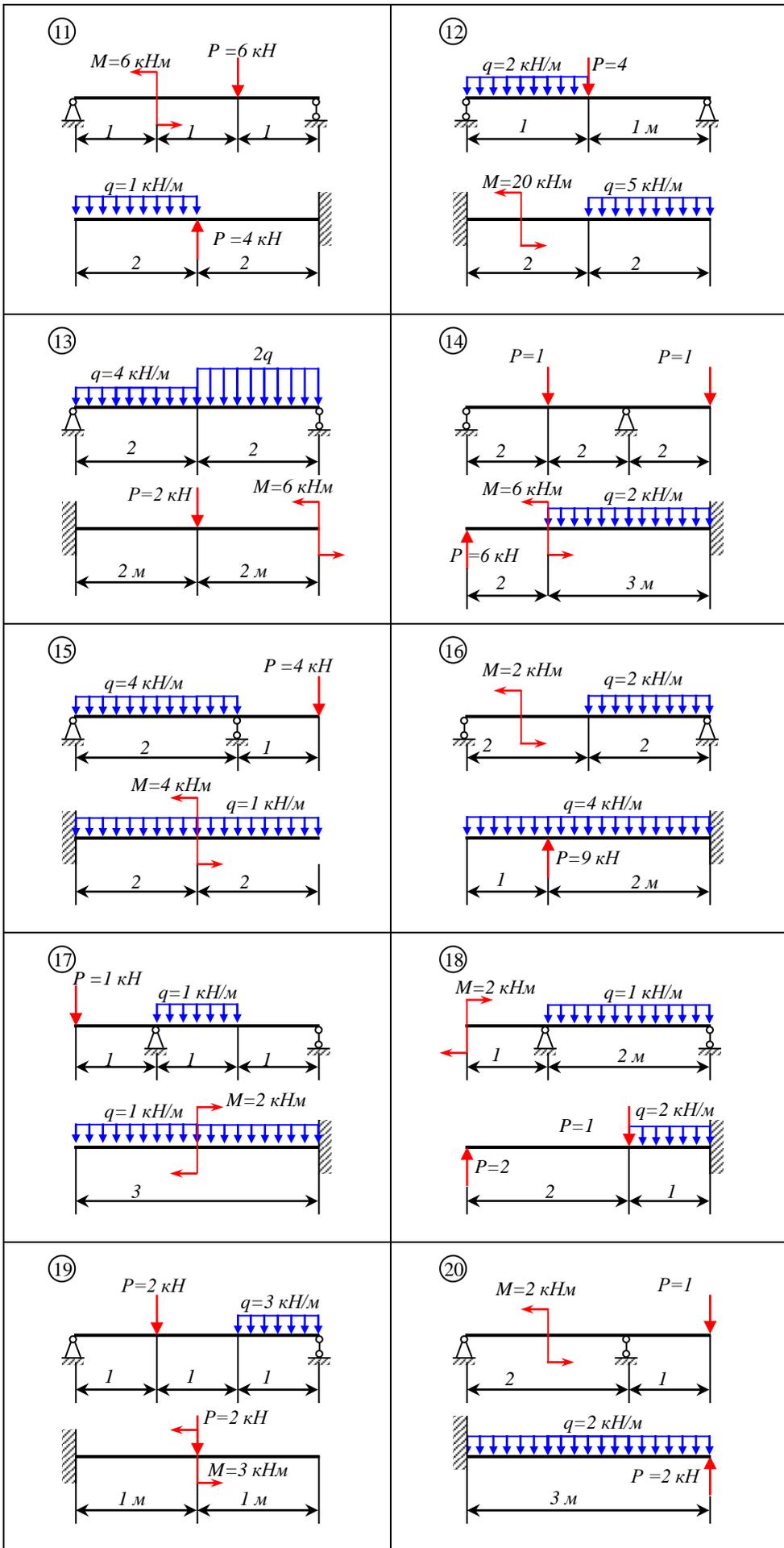


Рис. 8 - Схема задачи

Задача 3. Определить реакции опор балки (рисунок 9).





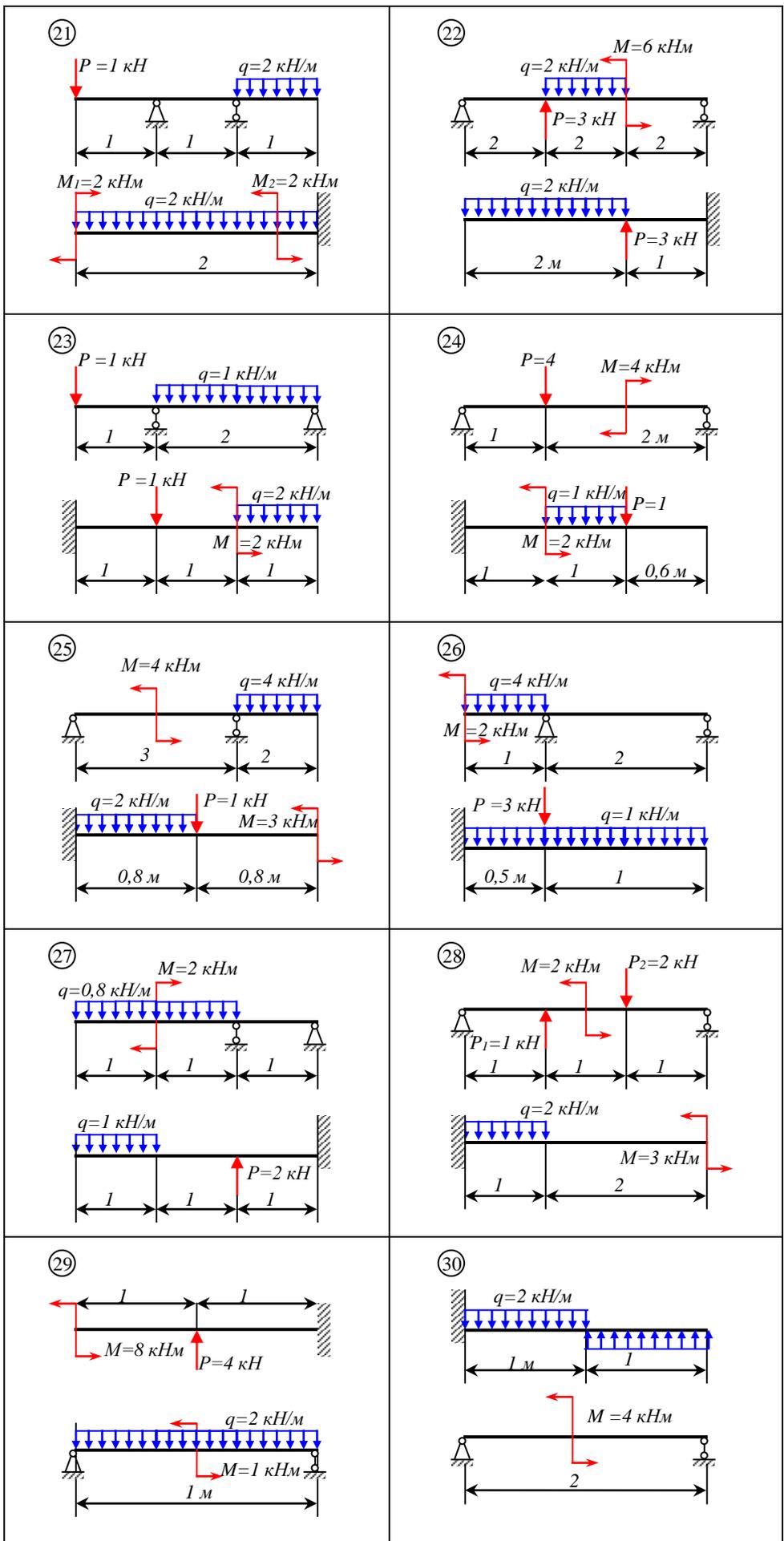


Рис. 9 - Схема задачи

Практическое занятие 4

Практическое занятие 4 Определение центра тяжести плоских фигур

Цель работы – научиться определять положение центра тяжести сложных плоских фигур, составленных из простых геометрических фигур и из профилей стандартного проката с одной или двумя осями симметрии.

В результате выполнения работы студент должен:

знать методы определения центра тяжести тела и плоских сечений, формулы для определения центра тяжести плоских сечений;

уметь определять координаты центра тяжести сложных геометрических фигур, определять положение центра тяжести фигур, составленных из стандартных профилей.

Теоретическое обоснование:

Основные формулы и предпосылки расчета

Центры тяжести простейших сечений (рис. 1)

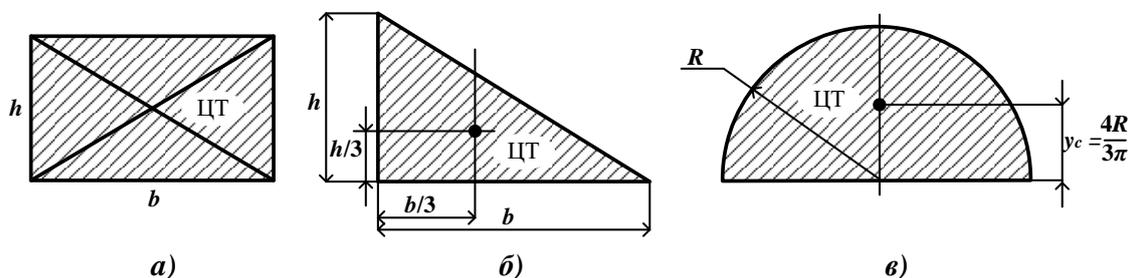


Рис. 1

Геометрические характеристики стандартных прокатных профилей в Приложении 1.
Методы расчета:

- 1) метод симметрии;
- 2) метод разделения на простые части;
- 3) метод отрицательных площадей.

Координаты центров тяжести сложных и составных сечений:

$$x_c = \frac{\sum_0^n A_k x_k}{A}; \quad y_c = \frac{\sum_0^n A_k y_k}{A}.$$

где A_k – площади частей сечения; x_k ; y_k – координаты ЦТ частей сечения; A – суммарная площадь сечения, $A = \sum A_k$.

Пример 1. Требуется определить положение центра тяжести сечения геометрической формы.

Решение. Положение центра тяжести фигуры сложной формы можно определить, разбив эту фигуру на пять элементов простой формы, положения центров тяжести которых известны (рис. 2):

- I – прямоугольник 25X30 см с центром тяжести C_1 ;
- II – прямоугольник 55X10 см с центром тяжести C_2 ;
- III – прямоугольник 25X15 см с центром тяжести C_3 ;
- IV – два треугольника с центрами тяжести C_4 и C_4 .

Нанесем на сечение координатные оси. Ось y совместим с осью симметрии сечения. Ось x проводим перпендикулярно ей по нижней грани сечения.

Поскольку сечение симметрично относительно вертикальной оси и, следовательно, $x_c = 0$, потребуется определить только ординату y_c центра тяжести по формуле $y_c = S_x / A$, где A – площадь сечения; S_x – статический момент сечения относительно оси x , определяется как сумма произведений плоских фигур на ординаты центра тяжести.

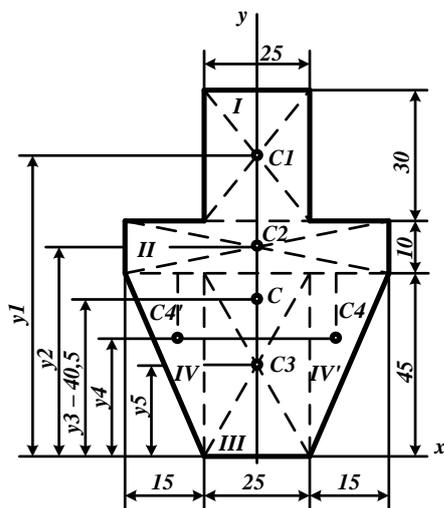


Рис. 2

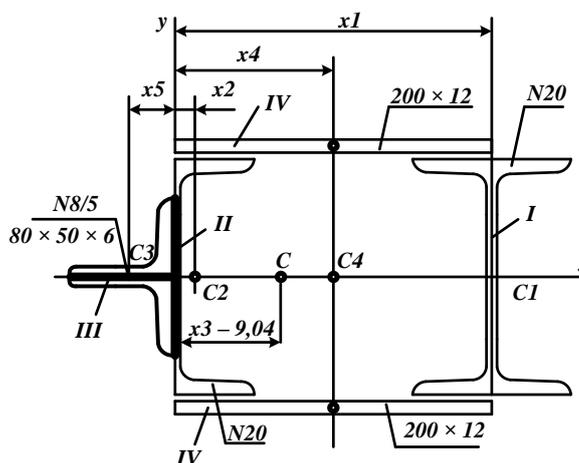


Рис. 3

Определяем площади составных частей фигуры и координаты их центров тяжести относительно выбранной оси, исходя из размеров сечения.

$$\begin{aligned}
 \text{I. } A_1 &= 25 \times 30 = 750 \text{ см}^2, & y_1 &= 70 \text{ см;} \\
 \text{II. } A_2 &= 55 \times 10 = 550 \text{ см}^2, & y_2 &= 50 \text{ см;} \\
 \text{III. } A_3 &= 25 \times 45 = 1125 \text{ см}^2, & y_3 &= 22,5 \text{ см;} \\
 \text{IV. } A_4 &= A'_4 = 15 \times 45/2 = 337,5 \text{ см}^2, & y_4 &= y'_4 = 30 \text{ см.}
 \end{aligned}$$

Находим статический момент площади сечения

$$\begin{aligned}
 S_x &= A_1 y_1 + A_2 y_2 + A_3 y_3 + 2A_4 y_4 = 750 \times 70 + 550 \times 50 + \\
 &+ 1125 \times 22,5 + 2 \times 337,5 \times 30 = 125562,5 \text{ см}^3.
 \end{aligned}$$

Площадь сечения $A = A_1 + A_2 + A_3 + 2A_4 = 750 + 550 + 1125 + 337,5 \times 2 = 3100 \text{ см}^2$.

Находим ординату центра тяжести $y_c = S_x/A = 125562,5/3100 = 40,5 \text{ см}$.

Итак, точка C имеет координаты $0; 40,5$.

По найденной ординате наносим на рисунок сечения точку C – центр тяжести. Разбивку рассмотренной фигуры по элементам можно было произвести иначе, как и положение оси x могло быть другим.

Пример 2. Требуется определить положение центра тяжести сечения, составленного из прокатных профилей (рис. 2):

Простые элементы подобных сечений – стандартные профили прокатной стали: швеллер, двутавр, полоса, равнобокие и неравнобокие уголки. Все необходимые размеры и характеристики профилей приведены в таблицах ГОСТа (Приложение I), называемых сортаментом прокатных профилей. Порядок решения тот же, что в предыдущей задаче.

Разбиваем сечение на шесть составных частей и обозначаем их центры тяжести. Положение центра тяжести прокатного профиля принять по сортаменту:

- I – двутавр № 20 с центром тяжести C_1 ;
- II – швеллер № 20 с центром тяжести C_2 ;
- III – два неравнобоких уголка № 8/5 с общим центром тяжести C_3 ;
- IV – две полосы 12X200 мм с общим центром тяжести C_4 .

Положение координатных осей принимаем следующим образом; ось x совмещаем с осью симметрии сечения, следовательно, $y_c = 0$; ось y проводим перпендикулярно оси x по наружной грани стенки швеллера. Необходимо определить лишь координату центра тяжести x_c по формуле $x_c = S_y/A$, где S_y – статический момент относительно оси y определяется аналогично S_x предыдущей задаче, с той лишь разницей, что в этом случае участвуют абсциссы x_1, x_2, x_3, x_4 центров тяжести прокатных профилей.

Выписываем из соответствующих таблиц сортамента площади профилей и, используя размеры, находим абсциссы их центров тяжести:

$$\text{Полная площадь сечения } A = A_1 + A_2 + A_3 + A_4 = 26,8 + 23,4 + 15,2 + 48 = 113,3 \text{ см}^2.$$

Находим статический момент сечения

$$S_y = A_1 x_1 + A_2 x_2 + A_3 x_3 + A_4 x_4 = 26,8 \times 20 + 23,4 \times 2,07 + 15,1 \times (-2,65) + 48 \times 10 = 1024,42 \text{ см}^3.$$

Определяем координату центра тяжести

$$\text{I. } A_1 = 26,8 \text{ см}^2,$$

$$x_1 = l_{\text{полосы}} = 20 \text{ см};$$

$$\text{II. } A_2 = 23,4 \text{ см}^2,$$

$$x_2 = z_0 = 2,07 \text{ см (см. приложение 2);}$$

$$\text{III. } A_3 = 2 \times 7,55 \text{ см}^2,$$

$$x_3 = y_0^* = -2,65 \text{ см}^* \text{ (см. приложение 4);}$$

$$\text{IV. } A_4 = A'_4 = 2 \times (1,2 \times 20) = 48 \text{ см}^2, \quad x_4 = l_{\text{полосы}}/2 = 10 \text{ см.}$$

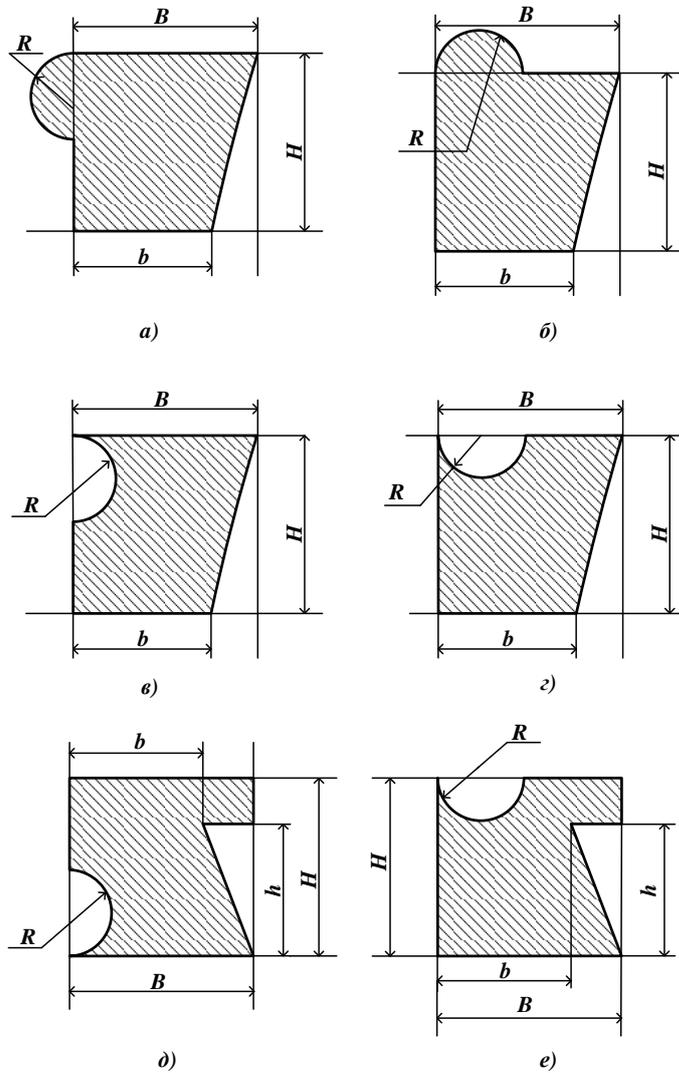
$$x_c = S_y/A = 1024,42 \text{ см}^3/113,3 \text{ см}^2 = 9,04 \text{ см.}$$

Итак, точка C имеет координаты 9,04; 0. Наносим найденный центр тяжести на рисунок сечения.

Задание для самостоятельной работы.

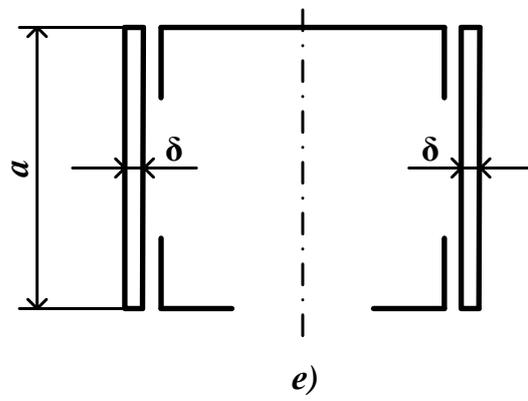
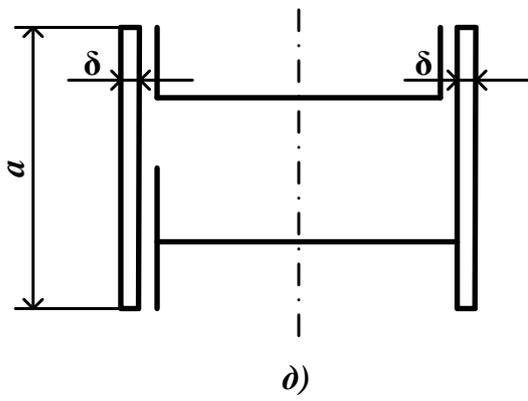
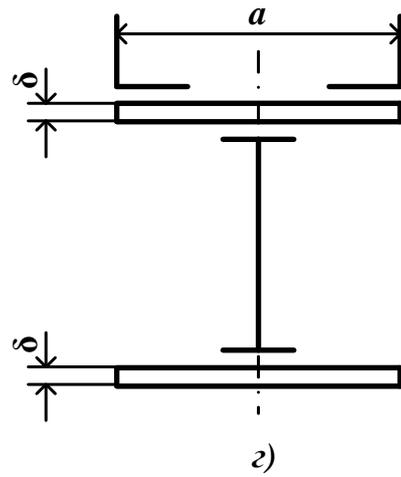
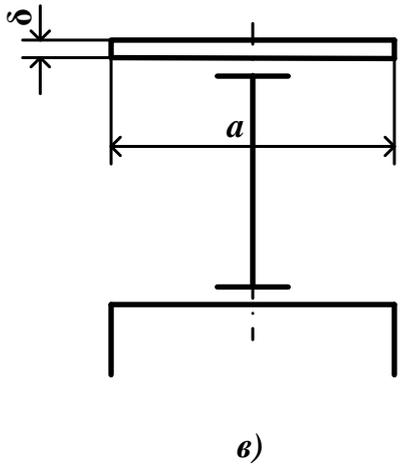
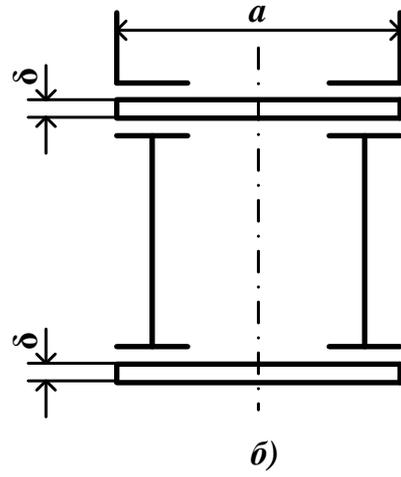
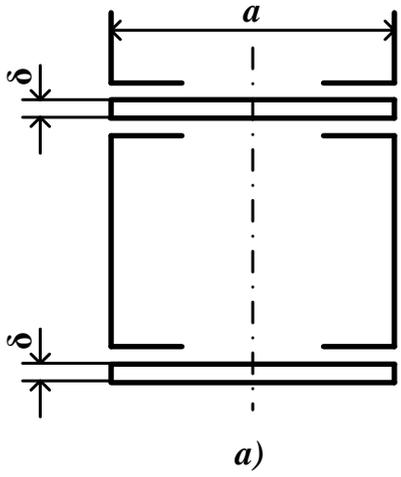
Задание 1. Определить координаты центра тяжести заданного сечения

Параметр	Вариант									
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
	Схема									
	а	б	в	г	д	е	а	б	в	г
В, мм	100	110	120	130	140	150	160	170	180	190
в, мм	60	70	80	90	100	110	120	130	140	150
Н, мм	80	90	100	110	120	130	140	150	160	170
h, мм	50	60	70	80	90	100	110	120	130	140
Р, мм	20	25	25	30	30	40	40	50	50	60



Задание 2. Определить координаты центра тяжести составного сечения. Сечения состоят из листов с поперечными размерами а·δ и прокатных профилей по ГОСТ 8239-89, ГОСТ 8240-89 и ГОСТ 8509-86. Уголки выбираются наименьшей толщины.

Параметр	Вариант									
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
	Схема									
	а	б	в	г	д	е	а	б	в	г
№ швеллера	18	18 _а	20	20 _а	22	22 _а	24	24 _а	27	30
№ двутавра	18	18 _а	20	20 _а	22	22 _а	24	24 _а	27	30
№ уголка	8	8	9	9	10	10	11	11	12,5	14
а, мм	180	200	200	220	220	240	240	260	270	300
δ, мм	5	5	5	5	5	5	6	6	6	6



Практическое занятие № 5 «Общие теоремы динамики».

Знать зависимости для определения мощности при поступательном и вращательном движениях.
КПД.

Знать основные уравнения динамики при поступательном и вращательном движениях твердого тела.

Уметь рассчитывать мощность с учетом потерь на трении и сил инерции.

Уметь определять параметры движения с помощью теорем динамики.

Расчетные формулы

Мощность при поступательном движении

$$P = F v \cos \alpha,$$

где F — постоянная сила, Н; v — скорость движения, м/с; α — угол между направлениями силы и перемещения.

Мощность при вращении

$$P = M\omega,$$

где M — вращающий момент, Нм; ω — угловая скорость, рад/с.

Коэффициент полезного действия

$$КПД = \frac{P_{\text{пол}}}{P_{\text{затр}}},$$

где $P_{\text{пол}}$ — полезная мощность, Вт; $P_{\text{затр}}$ — затраченная мощность, Вт

Сила инерции

$$F_{\text{ин}} = -m a,$$

где a — ускорение точки, м/с²; m — масса, кг.

Основные уравнения динамики

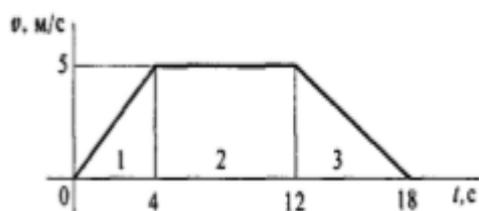
Поступательное движение твердого тела: $F = ma$.

Вращательное движение твердого тела: $M_z = J e$, где

M_z — суммарный момент внешних сил относительно оси вращения, Нм;

J — момент инерции относительно оси вращения, кг м²

e — угловое ускорение, рад/с².



Пример 1. График изменения скорости лифта при подъеме известен (рис. 5). Масса лифта с грузом 2800 кг. Определить натяжение каната, на котором подвешен лифт на всех участках подъема.

Решение

1. Рассмотрим участок 1 — подъем с ускорением.

Составим схему сил (рис. 5.1).

Рис.5

Уравнение равновесия кабины лифта:

$$\sum_0^n F_{ky} = 0; \quad T_1 - G - F_{\text{ин}1} = 0; \quad T_1 = G + F_{\text{ин}1} = mg + ma_1$$

где T — натяжение каната; G — сила тяжести;
 $F_{ин}$ — сила инерции растягивающая канат.

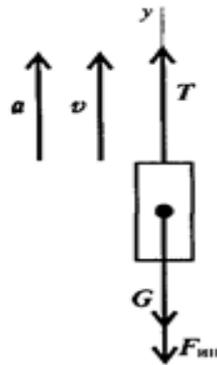


Рис.5.1

Для определения ускорения на участке
 равнопеременное, скорость

$$v = v_0 + at; v_0 = 0.$$

Следовательно, ускорение:

$$a_1 = \frac{v_1}{t_1} = \frac{5}{4}; a_1 = 1,25 \text{ м/с}^2.$$

1 учтем, что движение на этом участке

Определяем усилие натяжения каната при подъеме с ускорением

$$T_1 = 2800(9,81 + 1,25) = 30\,968 \text{ Н};$$

$$T_1 = 30,97 \text{ кН}.$$

2. Рассмотрим участок 2 — равномерный подъем.

Ускорение и сила инерции равны нулю. Натяжение каната равно силе тяжести.

$$T_2 - G = 0; T_2 = G = mg;$$

$$T_2 = 2800 \cdot 9,81 \approx 28 \text{ кН}.$$

3. Участок 3 — подъем с замедлением. Ускорение направлено в сторону, обратную направлению подъема. Составим схему сил (рис. 5.2).

Уравнение равновесия:

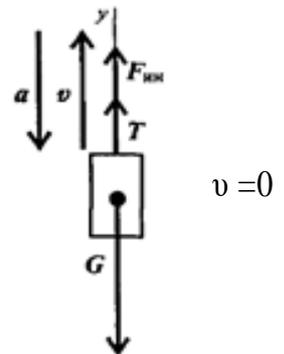
$$F_{ин} + T_3 - G = 0$$

Отсюда

$$T_3 = G - F_{ин3} = mg - ma_3$$

Ускорение (замедление) на этом участке определяется с учетом того, что

$$v_0 + a_3 t_3 = 0; a_3 = -\frac{v_0}{t_3}; a_3 = -\frac{5}{6} \text{ м/с}^2.$$



Натяжение каната при замедлении до остановки:

$$T_3 = 2\,800 (9,81 - 5/6) = 25\,144 \text{ Н};$$

$$T_3 = 25,14 \text{ кН}.$$

Рис.5.2

Таким образом, натяжение каната меняется при каждом подъеме и опускании, канат выходит из строя в результате усталости материала.

Работоспособность зависит от времени.

Пример 2. После отключения двигателя колесо радиусом 0,5 м и массой 700 кг имело угловую частоту вращения 300 об/мин. Определите момент трения в подшипниках, если вал колеса остановился через 1,5 мин. Вращение принять равнопеременным, колесо считать сплошным цилиндром (рис. 17.9).

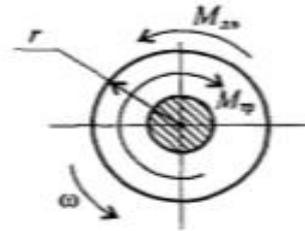


Рис. 17.9

Решение

1. Запишем уравнение динамики при вращении:

$$M_{\Sigma} = J\varepsilon = M_{\text{дв}} - M_{\text{тр}},$$

где M_{Σ} — суммарный момент внешних сил; J — момент инерции; ε — угловое ускорение; $M_{\text{дв}}$ — движущий момент; $M_{\text{тр}}$ — момент трения (сил сопротивления).

2. Определим угловое ускорение по формуле для угловой скорости при равнопеременном движении:

$$\omega = \omega_0 + \varepsilon t; \quad \omega_0 = \frac{\pi n}{30}; \quad \omega_0 = \frac{\pi \cdot 300}{30} = 31,4 \text{ рад/с}; \quad \omega = 0 \text{ (остановка)}.$$

Тогда

$$\varepsilon = -\frac{\omega_0}{t}; \quad \varepsilon = -\frac{31,4}{1,5 \cdot 60} = -0,35 \text{ рад/с}^2.$$

3. Определим момент инерции колеса, считая его сплошным цилиндром:

$$J = \frac{mr^2}{2} = \frac{700 \cdot 0,5^2}{2} = 87,5 \text{ кг} \cdot \text{м}^2.$$

4. Определяем величину тормозного момента — момента трения в подшипниках: $M_{\text{дв}} = 0$; $-M_{\text{тр}} = J\varepsilon$;
 $-M_{\text{тр}} = 87,5(-0,35)$; $M_{\text{тр}} = 30,625 \text{ Н} \cdot \text{м}$.

Пример 3. Шкив приводится во вращение ременной передачей (рис. 17.10). Натяжение ведущей ветви ремня $S_1 = 120 \text{ Н}$, ведомого — $S_2 = 50 \text{ Н}$. Масса шкива 200 кг, диаметр 80 мм, момент сопротивления в подшипниках 1,2 Н·м. Определить угловое ускорение вала пренебрегая его массой. Шкив считать тонкостенным цилиндром.

Решение

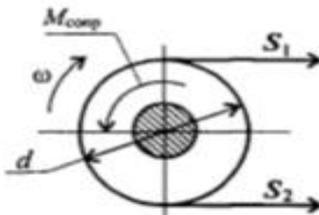


Рис. 17.10

1. Используем основное уравнение динамики $M_{\Sigma} = J\varepsilon$.

2. Определяем суммарный момент внешних сил

$$M_{\Sigma} = S_1 \frac{d}{2} - S_2 \frac{d}{2} - M_{\text{сопр}};$$

$$M_{\Sigma} = 120 \cdot \frac{0,08}{2} - 50 \cdot \frac{0,08}{2} - 1,2 = 1,6 \text{ Н} \cdot \text{м}.$$

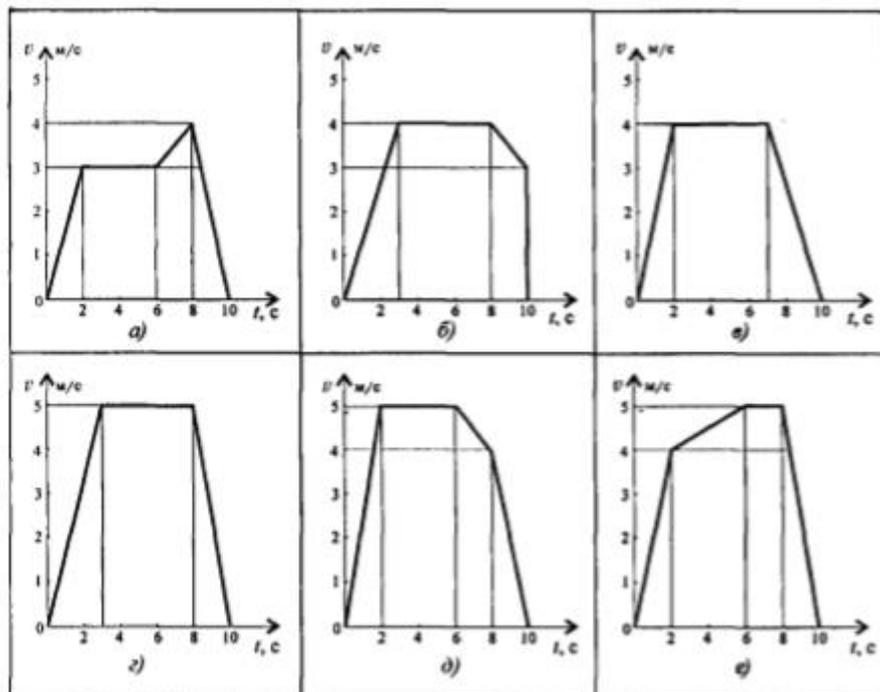
3. Рассчитываем момент инерции шкива, влиянием вала пренебрегаем:

$$J = mr^2; \quad J = 200 \left(\frac{0,08}{2} \right)^2 = 0,128 \text{ кг} \cdot \text{м}^2.$$

4. Определяем угловое ускорение шкива

$$\varepsilon = \frac{M_{\Sigma}}{J}; \quad \varepsilon = \frac{1,6}{0,128} = 12,5 \text{ рад/с}^2.$$

Задание . Скорость кабины лифта массой m изменяется согласно графикам. Определить величину натяжения каната, на котором подвешен лифт, при подъеме и опускании. По максимальной величине натяжения каната определить требуемую мощность электродвигателя.



Параметр	Вариант									
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Масса m , кг	500	700	750	800	600	800	600	450	900	850
КПД механизма	0,8	0,75	0,8	0,75	0,8	0,75	0,8	0,75	0,8	0,75

Рекомендации по выполнению задания.

- Используя принцип Даламбера, определить натяжение канат кабины лифта на каждом участке движения
- Определить максимальное натяжение каната.
- По максимальному натяжению каната определить максимальную требуемую мощность для подъема груза.
- По заданной величине КПД механизма определить максимальную мощность двигателя.

Основные источники:

1. Зиомковский, В. М. Техническая механика : учебное пособие для среднего профессионального образования / В. М. Зиомковский, И. В. Троицкий ; под научной редакцией В. И. Вешкурцева. — Москва : Издательство Юрайт, 2024. — 288 с. — (Профессиональное образование). — ISBN 978-5-534-10334-2. — Текст : электронный // Образовательная платформа Юрайт [сайт]. — URL: <https://urait.ru/bcode/542084>

Дополнительные источники:

- Аркуша А.И. Техническая механика. Теоретическая механика и сопротивление материалов: Учебник для средних учебных заведений. 6-е изд. - М.: Высшая школа, 2013.
- Олофинская В.П. Техническая механика: Курс лекций с вариантами практических и тестовых заданий: Учебное пособие / В.П. Олофинская. 3-е изд., испр.- М.: Форум, 2013

Электронные образовательные ресурсы:

1. Электронный ресурс «Техническая механика». Форма доступа: technical-mechanics.narod.ru