**Государственное бюджетное профессиональное образовательное учреждение
Иркутской области
«Иркутский техникум транспорта и строительства»**

МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ
ПО ВЫПОЛНЕНИЮ ПРАКТИЧЕСКИХ РАБОТ
УЧЕБНОЙ ДИСЦИПЛИНЫ

ЕН.01 Математика

по специальности среднего профессионального образования

23.02.01 Организация перевозок и управление на транспорте (автомобильном)

Квалификация: техник

Форма обучения: очная

Нормативный срок обучения: 3 года 10 месяцев
на базе основного общего образования

Иркутск, 2023

Организация-разработчик: ГБПОУ ИО «Иркутский техникум транспорта и строительства»

Разработчик: Котлярова Анастасия Сергеевна, преподаватель первой квалификационной категории

Рассмотрена и одобрена на заседании
ДЦК
Протокол № 10 от 1.06. 2023 г.

СОДЕРЖАНИЕ

1.ВВЕДЕНИЕ

Методические указания к практическим занятиям разработаны в соответствии с ФГОС СПО по специальности **23.02.01 Организация перевозок и управление на транспорте (автомобильном),** рабочим учебным планом и рабочей программой дисциплины ЕН **Математика** для студентов очной формы обучения. Рабочий учебный план, предусматривает изучение курса в течение 1 семестра.

Программа предусматривает 40 часов общего объема времени на этот вид работы, а также распределение времени на выполнение заданий в зависимости от их сложности и объема.

Программа практических занятий предполагает практическое осмысление и освоение следующих разделов:

- Дифференциальное и интегральное исчисление.
- Обыкновенные дифференциальные уравнения.
- Ряды.
- Комплексные числа.
- Множества и операции над множествами.
- Основы комбинаторики.
- Теория вероятностей. Математическая статистика.

Выполнение студентами практических занятий направлено на:

- обобщение, систематизацию, углубление теоретических знаний;
- формирование умений применять полученные знания в практической деятельности;
- развитие аналитических, проектировочных, конструктивных умений;
- выработку самостоятельности, ответственности, точности и творческой инициативы.

В результате выполнения практических занятий обучающийся должен:

уметь:

- решать обыкновенные дифференциальные уравнения.

знать:

- основные понятия и методы математического анализа, дискретной математики, теории вероятностей и математической статистики.
- основные численные методы решения прикладных задач.

Содержание дисциплины ориентировано на подготовку студентов к освоению профессиональных модулей и овладению профессиональными компетенциями:

ПК 1.1. Организовывать и проводить работы по техническому обслуживанию и ремонту автотранспорта.

ПК 1.2. Осуществлять технический контроль при хранении, эксплуатации, техническом обслуживании и ремонте автотранспортных средств.

ПК 1.3. Разрабатывать технологические процессы ремонта узлов и деталей.

ПК 2.2. Контролировать и оценивать качество работы исполнителей работ.

В процессе освоения дисциплины студент должен овладевать общими компетенциями:

ОК 1. Понимать сущность и социальную значимость своей будущей профессии, проявлять к ней устойчивый интерес.

ОК 2. Организовывать собственную деятельность, определять методы и способы выполнения профессиональных задач, оценивать их эффективность и качество.

ОК 3. Решать проблемы, оценивать риски и принимать решения в нестандартных ситуациях.

ОК 4. Осуществлять поиск, анализ и оценку информации, необходимой для постановки и решения профессиональных задач, профессионального и личностного развития.
ОК 5. Использовать информационно-коммуникационные технологии для совершенствования профессиональной деятельности.
ОК 6. Работать в коллективе и команде, обеспечивать ее сплочение, эффективно общаться с коллегами, руководством, потребителями.
ОК 7. Ставить цели, мотивировать деятельность подчиненных, организовывать и контролировать их работу с принятием на себя ответственности за результат выполнения заданий.
ОК 8. Самостоятельно определять задачи профессионального и личностного развития, заниматься самообразованием, осознанно планировать повышение квалификации.
ОК 9. Быть готовым к смене технологий в профессиональной деятельности.
ОК 10. Исполнять воинскую обязанность, в том числе с применением полученных профессиональных знаний (для юношей).

Практические занятия - один из видов практического обучения, имеющий целью закрепление теоретических знаний и формирование практических умений и навыков. Практическая работа по математике заключается в выполнении студентами под руководством преподавателя комплекса учебных заданий, направленных на усвоение основ учебной дисциплины, приобретение практических навыков решения примеров и задач.

Методиские указания к выпонению практических работ содержат:
- тему;
- количество часов;
- цель работы;
- задание для практической работы;
- контрольные вопросы

Критерии оценки практических занятий:

Отметка "5" ставится при условии, если:
работа выполнена полностью;
в логических рассуждениях и обосновании нет пробелов и ошибок;
в решении нет математических ошибок (возможна одна неточность, описка, не являющаяся следствие незнания или непонимания учебного материала)
Отметка "4" ставится при условии, если:
работа выполнена полностью, но обоснования шагов решения недостаточны (если умение обосновывать рассуждения не являлось специальным объектом проверки);
допущена одна существенная ошибка или две-три несущественных ошибки
Отметка "3" ставится при условии, если:
допущены более одной существенной ошибки или более двух-трех несущественных ошибок, но обучающийся владеет обязательными умениями по проверяемой теме; при этом правильно не выполнено менее половины работы
Отметка "2" ставится при условии, если:
допущены существенные ошибки, показавшие. что обучающийся не владеет обязательными умениями по данной теме в полной мере.

К категории *существенных ошибок* следует отнести ошибки, связанные с незнанием, непониманием обувающимися основных положений теории и с неправильным применением методов, способов, приемов решения практических заданий, предусмотренных программой

К категории *несущественных ошибок* следует отнести погрешности, связанные с небрежным выполнением записей, рисунков, графиков, чертежей, а также погрешности и недочеты, которые не приводят к искажению смысла задания и его выполнения.

2.ПЕРЕЧЕНЬ ПРАКТИЧЕСКИХ ЗАНЯТИЙ

№ п/п	Тематика практических занятий	Количество часов.
1.	Вычисление пределов	2
2.	Непрерывность функции	2
3.	Вычисление производной и исследование функции.	2
4.	Дифференциал функции. Частные производные.	2
5.	Вычисление неопределенных интегралов.	2
6.	Вычисление определенных интегралов.	2
7.	Решение дифференциальных уравнений первого порядка.	2
8.	Решение дифференциальных уравнений с разделяющимися переменными.	2
9.	Решение дифференциальных однородных уравнений первого порядка.	2
10.	Определение сходимости рядов по признаку Даламбера. Разложение функций в ряд Маклорена.	2
11.	Применение рядов в приближенных вычислениях.	2
12.	Действия над комплексными числами.	2
13.	Применение метода комплексных чисел для решения прикладных задач.	2
14.	Элементы математической логики.	2
15.	Основы комбинаторики	2
16.	Решение задач.	2
17.	Вычисление вероятности случайного события.	2
18.	Формула полной вероятности. Формула Бейеса.	2
19.	Повторные и независимые испытания.	2
20.	Случайная величина. Закон распределения.	2
	Итого	**40**

3. СОДЕРЖАНИЕ ПРАКТИЧЕСКИХ ЗАНЯТИЙ И МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ К ИХ ВЫПОЛНЕНИЮ

ПРАКТИЧЕСКОЕ ЗАНЯТИЕ №1

1.Тема: Вычисление пределов.

2.Количество часов: 2

3. Цель работы: научиться вычислять пределы, раскрывать неопределенности вида $\frac{\infty}{\infty}$, $\frac{0}{0}$.

4.Необходимые знания для выполнения задания

$\lim\limits_{x\to\infty}\frac{1}{x}=0$ - бесконечно малая величина

$\lim\limits_{x\to 0}\frac{1}{x}=\infty$ - бесконечно большая величина

Алгоритм решения:

1. Подставить в выражение предельное значение аргумента.
2. Определить есть или нет неопределенность. Если нет, дать ответ.
3. Если неопределенность есть, то по ее виду выбрать одно из правил устранения этой неопределенности.
4. Преобразовать выражение согласно выбранному правилу, и к новой форме предела применить данный алгоритм, начиная с п.1.

<u>Правило 1.</u>

$\lim\limits_{x\to\infty}\frac{f_1(x)}{f_2(x)}=\left[\frac{\infty}{\infty}\right]\Rightarrow$ В числителе и знаменателе вынести x в максимальной степени, если это возможно.

<u>Правило 2.</u>

$\lim\limits_{x\to x_0}\frac{f_1(x)}{f_2(x)}=\left[\frac{0}{0}\right]\Rightarrow$ Числитель и знаменатель разделить одновременно на $(x-x_0)$, если это возможно.

<u>Правило 3.</u>

При вычислении пределов от иррациональных выражений, не попадающих в предыдущие правила, следует избавиться от корней, входящих в неопределенность. Возможны следующие способы:

3.1. замена переменной $x=t^m$, позволяющая извлечь корни, входящие в неопределенность;

3.2. дополнение до формулы, позволяющей возвести корень в соответствующую ему степень; здесь используются формулы: $(a-b)(a+b)=a^2-b^2$; $(a\pm b)(a^2\mp ab+b^2)=a^3\pm b^3$.

Например, $\sqrt{x+a} - \sqrt{x+b} =$

$$= \frac{\left(\sqrt{x+a} - \sqrt{x+b}\right)\left(\sqrt{x+a} + \sqrt{x+b}\right)}{\sqrt{x+a} + \sqrt{x+b}} = \frac{a-b}{\sqrt{x+a} + \sqrt{x+b}},$$

т.е. умножили и разделили на сопряженное выражение.

Правило 4.

При наличии неопределенности в пределе от выражения, содержащего тригонометрические функции, следует выделить в этом выражении **первый замечательный предел:**

$$\lim_{\alpha \to 0} \frac{\sin\alpha}{\alpha} = 1 \quad . \quad (1)$$

5. Задание для практической работы

Вычислить	
1	1) $\lim\limits_{x \to 2} (2x^2 - 3x + 4);$ 2) $\lim\limits_{x \to -1} (x^3 - x^2 + 1);$ 3) $\lim\limits_{x \to 0} (3x^3 + x^2 + 8x + 10);$ 4) $\lim\limits_{x \to 2} ((x^2 - 1)(x - 3)(x - 5));$ 5) $\lim\limits_{x \to -1} \dfrac{(x+3)(x-2)}{x+2};$ 6) $\lim\limits_{x \to 4} \dfrac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}-1}.$
2	1) $\lim\limits_{x \to 3} \dfrac{3}{2x-6};$ 2) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{4}{3x^2+2x};$ 3) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{2x^3-2x^2}{5x^3-4x^2};$ 4) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{3x^3+x}{x};$ 5) $\lim\limits_{x \to 3} \dfrac{x-3}{x^2-9};$ 6) $\lim\limits_{x \to (-3/2)} \dfrac{4x^2-9}{2x+3};$
3	1) $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{2x^3-3x^2+1}{x^3+4x^2+2x};$ 2) $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{3x^2-5x+4}{x^2+2x+3};$ 3) $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{x^5+x^6}{x^3+x^4};$ 4) $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{x^4-x^3+i}{x^3+2x^2+x};$ 5) $\lim\limits_{x \to \infty} (\sqrt{x^2-x} - x);$ 6) $\lim\limits_{x \to \infty} (\sqrt{x^2+5x} - x).$

4	1) $\lim\limits_{x\to\pi} \dfrac{\sin^2 x}{1+\cos x}$; 2) $\lim\limits_{x\to(\pi/4)} \dfrac{\sin x-\cos x}{\operatorname{tg} x-1}$; 3) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\operatorname{tg} x}{\sqrt{1-\operatorname{tg} x}-1}$; 4) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{3x}{\sin 2x}$; 5) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin^3 3x}{x^3}$; 6) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin^3 x}{x^4}$.

ПРАКТИЧЕСКОЕ ЗАНЯТИЕ №2

1.Тема:Непрерывность функции.

2.Количество часов: 2

3. Цель работы: научиться исследовать функцию на непрерывность в точке.

4.Необходимые знания для выполнения задания:

Если односторонние пределы конечны и равны: $\lim\limits_{x\to k-0} f(x)=\lim\limits_{x\to k+0} f(x)=m$, то существует ОБЩИЙ предел $\lim\limits_{x\to k} f(x)=m$.

<u>**Определение**</u>: функция непрерывна в точке k, если предел функции в данной точке равен значению функции в этой точке: $\lim\limits_{x\to k} f(x)=f(k)$.

<u>***Определение детализируется в следующих условиях:***</u>

1) Функция должна быть определена в точке k, то есть должно существовать значение $f(k)$.

2) Должен существовать общий предел функции $\lim\limits_{x\to k} f(x)$. Как отмечалось выше, это подразумевает существование и равенство односторонних пределов: $\lim\limits_{x\to k-0} f(x)=\lim\limits_{x\to k+0} f(x)$.

3) Предел функции в данной точке должен быть равен значению функции в этой точке: $\lim\limits_{x\to k} f(x)=f(k)$.

Если нарушено **хотя бы одно** из трёх условий, то функция теряет свойство непрерывности в точке k.

Непрерывность функции на интервале: функция непрерывна на интервале (a,b), если она непрерывна в каждой точке данного интервала.

Классификация точек разрыва

1. Если в точке k нарушено условие непрерывности **и односторонние пределы <u>конечны</u>**, то она называется **точкой разрыва первого рода**.

2. **Точкой разрыва второго рода(бесконечный разрыв)** – когда левосторонний или правосторонний, а чаще, оба предела бесконечны.

5. Задание для практической работы:

Задана функция y=f(x). Установить, является ли данная функция непрерывной. В случае разрыва функции в некоторой точке найти ее пределы слева и справа, классифицировать

характер разрыва. Построить схематично график функции.	
1	$f(x) = \{-x, x \leq 0, \{-(x-1)^2, 0 < x < 2,$
2	$f(x) = \{\cos x, x \leq 0, \{x^2 + 1, 0 < x < 1,$
3	$f(x) = \{-(x+1), x \leq -1, \{(x+1)^2, -1 < x \leq 0,$
4	$f(x) = \{-x^2, x \leq 0, \left\{\text{tgx}, 0 < x \leq \frac{\pi}{4},\right.$
5	$f(x) = \{-2x, x \leq 0, \{x^2 + 1, 0 < x \leq 1,$
6	$f(x) = \{-2x, x \leq 0, \left\{\sqrt{x}, 0 < x < 4,\right.$

ПРАКТИЧЕСКОЕ ЗАНЯТИЕ №3

1.Тема: Вычисление производной и исследование функции.

2.Количество часов: 2

3. Цель работы: научиться вычислять производную сложной функции, исследовать функцию с помощью производной.

4.Необходимые знания для выполнения задания:

Если y является дифференцируемой функцией от u, а u является дифференцируемой функцией от x, то производная y по x равна произведению производной функции y по u на производную функции u по x.

$$f(\varphi(x))' = f'(\varphi(x))\varphi'(x).$$

Формулы дифференцирования

$$(u^n)' = nu^{n-1}u' \qquad (\lg u)' = \frac{0{,}4343}{u}u'$$

$$\left(\frac{1}{u}\right)' = -\frac{1}{u^2}\cdot u' \qquad (\log_a u)' = \frac{1}{u\ \ln a}\cdot u'$$

$$(\sqrt{u})' = \frac{1}{2\sqrt{u}}\cdot u' \qquad (a^u)' = a^u \ln a \cdot u'$$

$$(\ln u)' = \frac{1}{u}\cdot u' \qquad (e^u)' = e^u \cdot u'$$

Производные тригонометрических функций

$$(\sin u)' = \cos u \cdot u' \qquad (\cos u)' = -\sin u \cdot u'$$

$$(\text{tg } u)' = \frac{1}{\cos^2 u}\cdot u' \qquad (\text{ctg } u)' = -\frac{1}{\sin^2 u}\cdot u'$$

Исследование функции на максимум и минимум с помощью первой производной:

I. Найти производную $f'(x)$ функции $f(x)$.

II. Найти критические точки функции $y = f(x)$, т. е. точки, в которых $f'(x)$ обращается в нуль или терпит разрыв.

III. Исследовать знак производной $f'(x)$ в промежутках, на которые найденные критические точки делят область определения функции $f(x)$. При этом критическая точка $x = x_0$ есть точка минимума, если производная меняет знак при переходе через $x = x_0$. Если же в соседних промежутках, разделенных критической точкой $x = x_0$, знак производной не меняется, то в точке $x = x_0$ функция не имеет ни максимума, ни минимума.

IV. Вычислить значения функции в точках максимума и минимума.

Наибольшее и наименьшее значения функции:

I. Найти критические точки, принадлежащие заданному промежутку, и вычислить значения функции в этих точках.

II. Найти значения функции на концах промежутка.

III. Сравнить полученные значения: минимальное и максимальное из них являются соответственно минимумом и максимумом функции в рассматриваемом промежутке.

5. Задание для практической работы:

Вычислить значение производной при данном значении аргумента.	
1	1) $f(x) = (x^2 + 2x - 1)^4$, $x = -1$; 2) $f(x) = (x^3 - 4x^2 + 3)^7$, $x = 1$; 3) $f(x) = (3x - 1)^4$, $x = 1$.
2	1) $f(x) = \sqrt{4 - x^2}$, $x = \sqrt{3}$; 2) $f(x) = \sqrt{x^3 + 1}$, $x = 2$; 3) $f(x) = \sqrt{x^2 - 2x}$, $x = 3$.
3	1) $f(x) = \frac{6\sqrt{x^2 + 1}}{x}$, $x = 2\sqrt{2}$; 2) $f(x) = \frac{\sqrt{x^2 - 1}}{x}$, $x = \sqrt{5}$; 3) $f(x) = \frac{2x + 1}{\sqrt{x^2 + 1}}$, $x = \sqrt{3}$.

4	1) $f(x)=\sin^2 2x$, $x=\pi/16$; 2) $f(x)=\cos^2 2x$, $x=\pi/16$; 3) $f(x)=\mathrm{tg}^2 3x$, $x=\pi/12$; 4) $f(x)=\mathrm{tg}^2 x\sin x$, $x=\pi/3$; 5) $f(x)=8\sin^2 x\cos x$, $x=\pi/4$;
Исследовать функции на промежутки монотонности и точки экстремума.	
5	1) $y=x^2-6x+5$; 2) $y=2x^2-4x+5$; 3) $y=-x^2+4x+1$; 4) $y=x^3-3x^2+1$; 5) $y=-\frac{1}{3}x^3+\frac{1}{2}x^2+2$; 6) $y=-2x^3+15x^2-36x+20$; 7) $y=x^4-4x+4$; 8) $y=-\frac{1}{4}x^4-x-1$; 9) $y=\frac{1}{2x}$; 10) $f(x)=\frac{1}{3x-2}$;
Найти наибольшее и наименьшее значения функции.	
6	1) $y=x^2-6x+3$, $x\in[0;5]$; 2) $y=x^2-8x+4$, $x\in[-2;2]$; 3) $y=x-\frac{1}{4}x^2$, $x\in[-2;4]$; 4) $y=x^2-6x+13$, $x\in[0;6]$; 5) $y=\frac{1}{2}x^2-\frac{1}{3}x^3$, $x\in[1;3]$; 6) $y=-x^3+9x^2-24x+10$, $x\in[0;3]$.

ПРАКТИЧЕСКОЕ ЗАНЯТИЕ №4

1.Тема: Дифференциал функции. Частные производные.

2.Количество часов: 2

3. Цель работы: научиться вычислять дифференциал функции, применять дифференциал функции к приближенному вычислению, вычислять частные производные.

4.Необходимые знания для выполнения задания:

Дифференциал функции одной переменной записывается в следующем виде:

$dy=y'dx$ или $df(x)=f'(x)dx$

Формула вычисления приближенного значения с помощью дифференциала:

$$f(x_0+\Delta x)\approx f(x_0)+d\left[f(x_0)\right]$$

5. Задание для практической работы:

Найти дифференциал функции.

1	1) $y = (1 - x)^5$; 2) $y = \sqrt{4 - 2x^2}$; 3) $y = \dfrac{1}{\sqrt{2x - 1}}$; 4) $y = \ln \cos^2 x$; 5) $y = \ln \operatorname{tg} 2x$; 6) $y = 2^{3x}$; 7) $y = e^x \sin x$; 8) $y = 1 + e^{-x}$.
Вычислить приближенное значение функции.	
2	1) $f(x) = 2x^2 - x + 1$ при $x = 2{,}01$; 2) $f(x) = x^2 + 3x + 1$ при $x = 3{,}02$; 3) $f(x) = \dfrac{1}{3}x^3 + \dfrac{1}{2}x^2 - 2x + 4$ при $x = 1{,}1$; 4) $f(x) = x^3 + x^2 + x + 1$ при $x = 0{,}001$; 5) $f(x) = x^4 - 1$ при $x = -3{,}3$; 6) $f(x) = \dfrac{x}{\sqrt{x^2 + 3}}$ при $x = 1{,}1$; 7) $f(x) = x^3 - x^2 + x - 3$ при $x = 3{,}03$; 8) $f(x) = 3x^3 - x^2 + 5x - 1$ при $x = 3{,}02$.

ПРАКТИЧЕСКОЕ ЗАНЯТИЕ №5

1.Тема:Вычисление неопределенных интегралов.

2.Количество часов: 2

3. Цель работы:научиться вычислять неопределенный интеграл.

4.Необходимые знания для выполнения задания:

ТАБЛИЦА НЕОПРЕДЕЛЕННЫХ ИНТЕГРАЛОВ

I. $\int dx = x$.

II. $\int (a + bx)^n \, dx = \dfrac{(a + bx)^{n+1}}{b(n+1)}$, $(n \neq -1)$.

III. $\int x^n \, dx = \dfrac{x^{n+1}}{n+1}$, $(n \neq -1)$.

IV. $\int \dfrac{dx}{a + bx} = \dfrac{1}{b} \ln |a + bx|$.

V. $\int \dfrac{dx}{x} = \ln |x|$.

VI. $\int \dfrac{dx}{1 + x^2} = \operatorname{arctg} x$.

VII. $\int \sqrt{a + bx} \, dx = \dfrac{2}{3b}(\sqrt{a + bx})^3$.

VIII. $\int \dfrac{dx}{\sqrt{1 - x^2}} = \arcsin x$.

IX. $\int e^x \, dx = e^x$.

X. $\int \ln x \, dx = x \ln x - x$.

XI. $\int a^x \, dx = \dfrac{a^x}{\ln a}$.

XII. $\int \cos x \, dx = \sin x$.

XIII. $\int \sin x \, dx = -\cos x$.

XIV. $\int \dfrac{dx}{\cos^2 x} = \operatorname{tg} x$.

XV. $\int \dfrac{dx}{\sin^2 x} = -\operatorname{ctg} x$.

5. Задание для практической работы:

Вычислить интеграл.

1	1) $\int 3x^2\,dx$; 2) $\int x^4\,dx$; 3) $\int x^{(m-1)}\,dx$; 4) $\int 4t^3\,dt$; 5) $\int \frac{dx}{x^2}$.
2	1) $\int (2x^2-1)^2\,dx$; 2) $\int x^3(1-6x^2)\,dx$; 3) $\int (3x^{-4}+8x^{5})\,dx$; 4) $\int (x^{-4}-x^{-3}-3x^{-2}+1)\,dx$; 5) $\int (5u^{3/2}-7u^{3/4})\,du$.
3	1) $\int 5^x\,dx$; 2) $\int 4^{2x}\,dx$; 3) $\int (e^x+2x)\,dx$; 4) $\int (3^x-e^x-1)\,dx$; 5) $\int \frac{2dx}{x+3}$.
4	1) $\int (\sin x-5)\,dx$; 2) $\int \frac{\sin 2x}{\cos x}\,dx$; 3) $\int \sin 6x\,dx$; 4) $\int (4-3\cos x)\,dx$; 5) $\int \cos 4x\,dx$.
5	1) $\int \frac{\cos x\,dx}{3\sin x-1}$; 2) $\int \frac{\sin x\,dx}{2-\cos x}$; 3) $\int \frac{\cos x\,dx}{3+2\sin x}$; 4) $\int \frac{dx}{\cos^2 5x}$; 5) $\int \frac{dx}{\sin^2(3x+2)}$.
6	1) $\int \frac{2\,dx}{\sqrt{1-x^2}}$; 2) $\int \frac{du}{\sqrt{5-u^2}}$; 3) $\int \frac{dx}{\sqrt{5-4x^2}}$; 4) $\int \frac{dx}{25+x^2}$; 5) $\int \frac{dx}{2+3x^2}$.

ПРАКТИЧЕСКОЕ ЗАНЯТИЕ №6

1.Тема:Вычисление определенных интегралов.

2.Количество часов: 2

3. Цель работы:научиться вычислять определенный интеграл.

4.Необходимые знания для выполнения задания:

$$\boxed{\int_a^b f(x)\,dx = F(b)-F(a).}$$

Алгоритм нахождения определенного интеграла $\int_a^b f(x)\,dx$

I. Найти первообразную функцию $F(x)$ для функции $f(x)$.

II. Вычислить значение $F(x)$ при $x=b$ (b называется верхним пределом).

III. Вычислить значение $F(x)$ при $x=a$ (a называется нижним пределом).

IV. Вычислить разность $F(b)-F(a)$.

5. Задание для практической работы:

Вычислить интеграл.

1	.1) $\int_0^2 x^2\,dx$; 2) $\int_1^2 x^3\,dx$; 3) $\int_1^2 x^4\,dx$; 4) $\int_{-2}^3 (4x^3-3x^2+2x+1)\,dx$; 5) $\int_{-1}^0 (x^3+2x)\,dx$.
2	.1) $\int_{1/2}^1 \frac{dx}{x^3}$; 2) $\int_{1/3}^{1/2} \frac{dx}{x^2}$; 3) $\int_0^4 \sqrt{x}\,dx$; 4) $\int_1^8 \sqrt[3]{x^2}\,dx$; 5) $\int_8^{27} \frac{dx}{\sqrt[3]{x}}$.
3	.1) $\int_1^4 \left(\sqrt{x}-\frac{1}{\sqrt{x}}\right)dx$; 2) $\int_1^9 \frac{x-1}{\sqrt{x}}\,dx$; 3) $\int_1^3 e^{2x}\,dx$; 4) $\int_0^1 e^{3x}\,dx$; 5) $\int_3^6 \frac{dx}{x}$.
4	1) $\int_0^{\pi/3} \sin x\,dx$; 2) $\int_{-\pi/4}^{\pi/4} \cos x\,dx$; 3) $\int_{-\pi/2}^{\pi/2} (\cos x-\sin x)\,dx$; 4) $\int_0^{\pi/4} \frac{4\,dx}{\cos^2 x}$; 5) $\int_{\pi/6}^{\pi/3} \frac{dx}{\sin^2 x}$.

ПРАКТИЧЕСКОЕ ЗАНЯТИЕ №7

1.Тема:Решение дифференциальных уравнений первого порядка.

2.Количество часов: 2

3. Цель работы:научиться решать дифференциальные уравнения первого порядка.

4.Необходимые знания для выполнения задания:

Дифференциальное уравнение называется ***обыкновенным***, если искомая функция зависит от одного независимого переменного.

Порядком дифференциального уравнения называется порядок старшей производной (или дифференциала), входящей в данное уравнение.

Решением (или интегралом) ***дифференциального уравнения*** называется такая функция, которая обращает это уравнение в тождество.

Общим решением (или общим интегралом) ***дифференциального уравнения*** называется такое решение, в которое входит столько независимых произвольных постоянных, каков порядок уравнения. Так, общее решение дифференциального уравнения первого порядка содержит одну произвольную постоянную.

Частным решением дифференциального уравнения называется решение, полученное из общего при различных числовых значениях произвольных постоянных. Значения произвольных постоянных находятся при определенных начальных значениях аргумента и функции.

График частного решения дифференциального уравнения называется ***интегральной кривой***.

Общему решению дифференциального уравнения соответствует совокупность (семейство) всех интегральных кривых.

Дифференциальным уравнением первого порядка называется уравнение, в которое входят производные (или дифференциалы) не выше первого порядка.

5. Задание для практической работы:

Найт и общее решение уравнения.		
1	1) $x^2\,dx = 3y^2\,dy$; 3) $\dfrac{dy}{\sqrt{x}} = \dfrac{3dx}{\sqrt{y}}$;	2) $\sqrt{x}\,dy = \sqrt{y}\,dx$; 4) $(y+1)\,dx = (x-1)\,dy$.
2	1) $xy\,dx = (1+x^2)\,dy$; 2) $y^2\,dx + (x-2)\,dy = 0$; 3) $(x^2 - yx^2)\,dy + (y^2 + xy^2)\,dx = 0$; 4) $x^2\,dy - (2xy + 3y)\,dx = 0$.	
3	1) $(1+y^2)\,dx - \sqrt{x}\,dy = 0$; 2) $\sqrt{1-x^2}\,dy - x\sqrt{1-y^2}\,dx = 0$.	

ПРАКТИЧЕСКОЕ ЗАНЯТИЕ №8

1.Тема:Решение дифференциальных уравнений с разделяющимися переменными.

2.Количество часов: 2

3. Цель работы:научиться решать дифференциальные уравнения первого порядка с разделяющимися переменными.

4.Необходимые знания для выполнения задания:

Дифференциальным уравнением с разделяющимися переменными называется уравнение вида

$$\frac{dy}{dx} = f(x)\,\varphi(y).$$

Для решения этого уравнения нужно сначала разделить переменные:

$$\frac{dy}{\varphi(y)} = f(x)\,dx,$$

а затем проинтегрировать обе части полученного равенства:

$$\int \frac{dy}{\varphi(y)} = \int f(x)\,dx.$$

5. Задание для практической работы:

Найти частное решение уравнения при заданных условиях.	
1	1) $y\,dy = x\,dx$, $y = 4$ при $x = -2$; 2) $x\,dy = y\,dx$, $y = 6$ при $x = 2$; 3) $ds = (3t^2 - 2t)\,dt$, $s = 4$ при $t = 2$; 4) $\frac{dy}{x^2} = \frac{dx}{y^2}$, $y = 2$ при $x = 0$.
2	1) $\frac{dy}{x-1} = \frac{dx}{y-2}$, $y = 4$ при $x = 0$; 2) $(1 + y)\,dx = (1 - x)\,dy$, $y = 3$ при $x = -2$; 3) $(1 + x)y\,dx + (1 - y)x\,dy = 0$, $y = 1$ при $x = 1$; 4) $y^2\,dx = e^x\,dy$, $y = 1$ при $x = 0$.
3	1) $\frac{dy}{dx} - \frac{3y}{x} = e^x x^3$, $y = e$ при $x = 1$; 2) $\frac{dy}{dx} + \frac{2y}{x} = \frac{1}{x^2}$, $y = 1$ при $x = 2$.

ПРАКТИЧЕСКОЕ ЗАНЯТИЕ №9

1.Тема:Решение дифференциальных однородных уравнений первого порядка.

2.Количество часов: 2

3. Цель работы:научиться решать однородные дифференциальные уравнения первого порядка.

4.Необходимые знания для выполнения задания:

Нужно проверить, а **не является ли данное уравнение однородным**? Проверка несложная, и сам алгоритм проверки можно сформулировать так:

В исходное уравнение:

вместо x подставляем λx, вместо y подставляем λy, производную не трогаем:

Буква лямбда – это некоторый абстрактный числовой параметр, дело не в самих лямбдах, и не в их значениях, а дело вот в чём:

Если в результате преобразований удастся сократить ВСЕ «лямбды» (т.е. получить исходное уравнение), то данное дифференциальное уравнение является однородным.

Все однородные уравнения можно решить с помощью одной-единственной (!) стандартной замены.

Функцию «игрек» необходимо **заменитьпроизведением** некоторой функции t (тоже зависящей от «икс») и «икса»:

$y = tx$

Выясняем, во что превратится производная y' при такой замене, используем правило дифференцирования произведения. Если $y = tx$, то: $y' = (tx)' = (t)'x + t(x)' = t'x + t$

Подставляем $y = tx$ и $y' = t'x + t$ в исходное уравнение

5. Задание для практической работы:

Решить уравнение.	
1	$xy' = y - xe^{\frac{y}{x}}$
2	$xy' = 2\sqrt{3x^2 + y^2} + y$
3	$(x+y)y' + y = 0$
4	$y^2 + x^2y' = xyy'$
5	$(y^2 - 2xy)dx + x^2dy = 0$
6	$(2\sqrt{xy} - y)dx + xdy = 0$
7	$y' = \dfrac{5x^2 - xy + y^2}{x^2}$
8	$4y' = \dfrac{y^2}{x^2} + 10\dfrac{y}{x} + 5$

ПРАКТИЧЕСКОЕ ЗАНЯТИЕ №10

1.Тема:Определение сходимости рядов по признаку Даламбера. Разложение функций в ряд Маклорена.

2.Количество часов: 2

3. Цель работы:Дифференциал функции. Частные производные.

4.Необходимые знания для выполнения задания:

Теорема. Пусть для ряда с положительными членами при $n \to \infty$ существует предел отношения (n+1)-го члена к предыдущему ему n-му члену, то есть

$$\lim_{n\to\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = l.$$

Тогда:

- а) если предел отношения меньше единицы ($l < 1$), то ряд сходится;
- б) если предел отношения больше единицы ($l > 1$), то ряд расходится;
- в) если предел отношения равен единице ($l = 1$), то вопрос о сходимости ряда остаётся нерешённым.

5. Задание для практической работы:

Пример 1. Исследовать сходимость ряда с общим членом $u_n = n / 2^n$.

Пример 2. Исследовать сходимость ряда $\frac{4}{3} + \frac{16}{16 \bullet 9} + \frac{64}{81 \bullet 27} + \ldots + \frac{4^n}{n^4 3^n} + \ldots$.

Пример 3. Исследовать сходимость ряда с общим членом $u_n = \dfrac{1}{\ln(n+1)}$.

Пример 4. Исследовать сходимость ряда с общим членом $u_n = n/(n+1)^3$.

Пример 5. Исследовать сходимость ряда $\sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{(2n-1)!}{4^{n+2}}$

Пример 6. Исследовать сходимость ряда $\sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{3n-2}{7^{2n}}$

Пример 7. Исследовать сходимость ряда $\sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{2n-1}{\left(\sqrt{2}\right)^n}$

ПРАКТИЧЕСКОЕ ЗАНЯТИЕ №11

1.Тема:Применение рядов в приближенных вычислениях.
2.Количество часов: 2
3. Цель работы:Дифференциал функции. Частные производные.
4.Необходимые знания для выполнения задания:

Пусть требуется вычислить приближенно определенный интеграл $\int_a^b f(x)dx$ с заданной точностью ε.. Для этого необходимо:

- подынтегральную функцию разложить в степенной ряд, указав область сходимости;

- убедившись, что отрезок интегрирования [*a*,*b*] входит в область сходимости ряда, проинтегрировать обе части этого равенства, причем правую часть проинтегрировать почленно. В результате, в простейших случаях, получается знакочередующийся числовой ряд, удовлетворяющий условиям теоремы Лейбница, т.е. сходящийся ряд;

- в качестве приближенного значения интеграла берем значение частичной суммы S_n, число n определяется из условия, что ошибка при замене суммы ряда его частичной суммой по абсолютной величине не превосходит первого из отброшенных членов ряда.

5. Задание для практической работы:

1. Вычислить приближенно интеграл $\int_0^1 e^{-x^2} dx$ с точностьюε=0,1.
2. Вычислить приближенно интеграл $\int_0^{0,25} \sqrt[4]{1+x^3}\,dx$ с точностьюε=0,0001.
3. Пользуясь разложением в ряд sinx, вычислить sin20° с точностью до 0,0001.
4. Вычислить $\ln 3$ с точностью до 0,01.
5. Вычислить $\sqrt[3]{130}$ с точностью до 0,0001.

ПРАКТИЧЕСКОЕ ЗАНЯТИЕ №12

1.Тема:Действия над комплексными числами.
2.Количество часов: 2

3. Цель работы:научиться выполнять математические действия над комплексными числами.

4.Необходимые знания для выполнения задания:

Комплексными числами называются числа вида $a + bi$, где a и b — действительные числа, i — мнимая единица, определяемая равенством $i^2 = -1$.

Степени мнимой единицы:

$$i^2 = -1, \quad i^3 = -i, \quad i^4 = 1, \quad i^{4k} = 1, \quad i^{4k+1} = i,$$
$$i^{4k+2} = -1, \quad i^{4k+3} = -i, \quad k \in \mathbf{Z}^{1)}.$$

Два комплексных числа $a_1 + b_1 i$ и $a_2 + b_2 i$ называются ***равными***, если $a_1 = a_2$ и $b_1 = b_2$.

Сумма (разность) двух комплексных чисел $z_1 = a_1 + b_1 i$ и $z_2 = a_2 + b_2 i$ находится по формуле

$$z_1 \pm z_2 = (a_1 \pm a_2) + (b_1 \pm b_2)i.$$

Произведение двух комплексных чисел $z = a_1 + b_1 i$ и $z_2 = a_2 + b_2 i$ находится по формуле

$$z_1 \cdot z_2 = (a_1 a_2 - b_1 b_2) + (a_1 b_2 + a_2 b_1)\, i.$$

Частное двух комплексных чисел находится по формуле

$$\frac{a_1 + b_1 i}{a_2 + b_2 i} = \frac{(a_1 + b_1 i)(a_1 - b_1 i)}{(a_2 + b_2 i)(a_2 - b_2 i)} = \frac{a_1 a_2 + b_1 b_2}{a_2^2 + b_2^2} + \frac{a_2 b_1 + a_1 b_2}{a_2^2 + b_2^2}\, i.$$

Действия над комплексными числами можно производить по правилам действий над алгебраическими двучленами, принимая во внимание, что $i^2 = -1$.

5. Задание для практической работы:

Выполнить сложение и вычитание комплексных чисел.	
1	1) $z_1 = -3 + 5i$, $z_2 = 4 - 7i$; 2) $z_1 = -\frac{2}{3} + \frac{1}{4}i$, $z_2 = \frac{1}{4} + \frac{5}{6}i$; 3) $z_1 = -0{,}6 + 0{,}2i$, $z_2 = -0{,}4 - 0{,}5i$; 4) $z_1 = 3{,}6 + 0{,}2i$, $z_2 = 1{,}4 - 0{,}2i$; 5) $z_1 = 3 - 0{,}7i$, $z_2 = -3 + 0{,}7i$; 6) $z_1 = -1 + 3i$, $z_2 = 4 + 5i$.
Выполнить умножение комплексных чисел.	

2	1) $z_1 = 4 - 2i,\ z_2 = 3 + 8i$; 2) $z_1 = \frac{5}{6} + \frac{3}{4}i,\ z_2 = \frac{5}{6} - \frac{1}{4}i$; 3) $z_1 = \frac{7}{8} - \frac{1}{5}i,\ z_2 = \frac{3}{8} - \frac{1}{5}i$; 4) $z_1 = 1{,}5 - 2{,}1i,\ z_2 = 0{,}5 + 0{,}9i$; 5) $z_1 = \frac{3}{4} - \frac{1}{2}i,\ z_2 = \frac{1}{8} + \frac{3}{8}i$; 6) $z_1 = \frac{7}{8} - \frac{1}{2}i,\ z_2 = -\frac{1}{2}i$.	
Выполнить деление комплексных чисел.		
3	1) $z_1 = 2 - 3i,\ z_2 = -4 + i$; 3) $z_1 = \sqrt{5}\,i,\ z_2 = 4\sqrt{5}\,i$; 5) $z_1 = -1 + 6i,\ z_2 = 6 - i$; 7) $z_1 = 0{,}2 - 0{,}3i,\ z_2 = 0{,}5 + 0{,}4i$.	2) $z_1 = \frac{2}{3} - \frac{1}{4}i,\ z_2 = \frac{2}{3} + \frac{1}{4}i$; 4) $z_1 = 5 - 3i,\ z_2 = 2i$; 6) $z_1 = \frac{2}{3} - \frac{1}{3}i,\ z_2 = \frac{1}{3} + \frac{4}{3}i$;

ПРАКТИЧЕСКОЕ ЗАНЯТИЕ №13

1.Тема:Применение метода комплексных чисел для решения прикладных задач.

2.Количество часов: 2

3. Цель работы:научиться применять метод комплексных чисел при решении прикладных задач.

4.Необходимые знания для выполнения задания:

Любое действительное число a содержится в множестве комплексных чисел:

$$a = a + 0 \cdot i; \quad 0 = 0 + 0 \cdot i; \quad 1 = 1 + 0 \cdot i; \quad i = 0 + 1 \cdot i.$$

При $a = 0$ комплексное число обращается в чисто мнимое число bi.

Числа $a + bi$ и $a - bi$ называются ***комплексно сопряженными*** и обозначаются

$$\bar{z} = \overline{a + bi} = a - bi.$$

Комплексные числа $a + bi$ и $-a - bi$ называются ***противоположными***.

Модулем комплексного числа $z = a + bi$ называется число

$$|z| = |a + bi| = \sqrt{a^2 + b^2}.$$

5. Задание для практической работы:

Выполнить действия.

1	1) $\frac{1}{i}$; 2) $\frac{1}{1-i}$; 3) $\frac{3-2i}{1+3i}$; 4) $\frac{(1+2i)(2+i)}{3-2i}$; 5) $\frac{2+3i}{(4+i)(2-2i)}$; 6) $\frac{(3+2i)(2-i)}{(2+3i)(1+i)}$; 7) $\frac{a+bi}{a-bi}$; 8) $\frac{\sqrt{5}+i}{\sqrt{5}-2i}$; 9) $\frac{1-3i}{-2+i}+\frac{1+4i}{-1+3i}$; 10) $\frac{a+bi}{a-bi}-\frac{a-bi}{a+bi}$.
Вычислить.	
2	1) $i^6+i^{20}+i^{30}+i^{36}+i^{54}$; 2) $i+i^2+i^3+i^4+i^5$; 3) $i\cdot i^2\cdot i^3\cdot i^4$; 4) $\frac{1}{i^3}+\frac{1}{i^5}$; 5) $\frac{1}{i^{13}}+\frac{1}{i^{23}}+\frac{1}{i^{33}}$.
3	1) $(1-i)^8$; 2) $(1+i)^{15}$; 3) $\left(\frac{-1+\sqrt{2}i}{2}\right)^3$; 4) $(1+i)^{-3}$; 5) $(1-i)^{-12}$.

ПРАКТИЧЕСКОЕ ЗАНЯТИЕ №14

1.Тема: Элементы математической логики.

2.Количество часов: 2

3. Цель работы: научиться выполнять действия над множествами.

4.Необходимые знания для выполнения задания:

Два **множества А и В равны** (А=В), если они состоят из одних и тех же элементов. Например, если А={1,2,3,4}, В={3,1,4,2} то А=В.

Объединением (суммой) множеств А и В называется множество А ∪ В, элементы которого принадлежат хотя бы одному из этих множеств. Например, если А={1,2,4}, В={3,4,5,6}, то А ∪ В = {1,2,3,4,5,6}

Пересечением (произведением) множеств А и В называется множество А ∩ В, элементы которого принадлежат как множеству А, так и множеству В. Например, если А={1,2,4}, В={3,4,5,2}, то А ∩ В = {2,4}

Разностью множеств А и В называется множество АВ, элементы которого принадлежат множесву А, но не принадлежат множеству В. Например, если А={1,2,3,4}, В={3,4,5}, то АВ = {1,2}

Симметричной разностью множеств А и В называется множество А Δ В, являющееся объединением разностей множеств АВ и ВА, то есть А Δ В = (АВ) ∪ (ВА). Например, если А={1,2,3,4}, В={3,4,5,6}, то А Δ В = {1,2} ∪ {5,6} = {1,2,5,6}

5. Задание для практической работы:

1. Решить задачи и показать решение кругами Эйлера.

<u>Задача №1</u>

– В олимпиаде по математике для абитуриентов приняло участие 40 учащихся, им было предложено решить одну задачу по алгебре, одну по геометрии и одну по тригонометрии. По алгебре решили задачу 20 человек, по геометрии – 18 человек, по тригонометрии – 18 человек. По алгебре и геометрии решили 7 человек, по алгебре и тригонометрии – 9 человек. Ни одной задачи не решили 3 человека.
– Сколько учащихся решили все задачи?
– Сколько учащихся решили только две задачи?

– Сколько учащихся решили только одну задачу?

Задача № 2

В классе 35 учеников. Каждый из них пользуется хотя бы одним из видов городского транспорта: метро, автобусом и троллейбусом. Всеми тремя видами транспорта пользуются 6 учеников, метро и автобусом – 15 учеников, метро и троллейбусом – 13 учеников, троллейбусом и автобусом – 9 учеников.

Сколько учеников пользуются только одним видом транспорта?

Задача 3

Даны множества A={1, 3, 8, 15}, B={8, 15, 3, 2}.

а) Найти их объединение.

б) Найти их пересечение.

в) Найти разность A и B.

г) Найти разность B и A.

д) Найти декартовое произведение A и B.

2. Задать множества

Задайте множество цифр, с помощью которых записывается число:

а) 3254;

б) 8797;

в) 11000;

г) 555555.

3. Записать ответ

1. Запишите на символическом языке следующее утверждение:

а) число 10 – натуральное;

б) число – 7 не является натуральным;

в) число – 100 является целым;

г) число 2,5 – не целое.

2. Верно ли, что: а) $-5 \in N$; б) $-5 \in Z$; в) $2,(45) \in Q$

ПРАКТИЧЕСКОЕ ЗАНЯТИЕ №15

1.Тема: Основы комбинаторики.

2.Количество часов: 2

3. Цель работы: научиться решать задачи используя основные формулы комбинаторики.

4.Необходимые знания для выполнения задания:

Перестановки-соединения, которые можно составить из n предметов, меняя всеми возможными сп…и их поряд… $P_n = 1*2*3*\dots*n = n!$ …ок из n элементов обозначают $P_n = n!$ число их Число *n* при этом называется *порядком* перестановки.

Размещения – соединения, содержащие по m предметов из числа n данных, различающихся либо порядком предметов, либо самими предметами; число их.

$$A_n^m = \frac{n!}{(n-m)!}$$

В комбинаторике **размещением** называется расположение “предметов” на некоторых “местах” при условии, что каждое место занято в точности одним предметом и все предметы различны.

Сочетания-соединения, содержащие по m предметов из n, различающиеся друг от друга, по крайней мере, одним предметом; число их

$$C_n^m = \frac{A_n^m}{P_m} = \frac{n!}{m!(n-m)!}$$

. Таким образом, количество вариантов при сочетании будет меньше количества размещений.

5. Задание для практической работы:
Решить задачи.

Задача № 1. Сколькими способами могут быть расставлены 8 участниц финального забега на 8-ти беговых дорожках?

Задача №2.Сколько четырехзначных чисел можно составить из цифр 1,2,3,4 если каждая цифра входит в изображение числа только один раз?

Задача № 3. Сколькими способами пятеро юношей могут пригласить пятерых из восьми девушек на танец?

Задача № 4. Сколько различных двузначных чисел можно составить из цифр 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 при условии, что в записи числа каждая цифра используется только один раз.

Задача №5 Сколькими способами из 10 человек можно выбрать комиссию, состоящую из 4 человек?

Задача № 6. В соревновании участвуют 12 команд. Сколько существует вариантов распределения призовых (1, 2, 3) мест?

Задача № 7. На соревнованиях по лёгкой атлетике нашу школу представляла команда из 10 спортсменов. Сколькими способами тренер может определить, кто из них побежит в эстафете 4□100 м на первом, втором, третьем и четвёртом этапах?

Задача № 8.Сколькими способами можно выложить в ряд красный, черный, синий и зеленый шарики?

Задача № 9. Учащимся дали список из 10 книг, которые рекомендуется прочитать во время каникул. Сколькими способами ученик может выбрать из них 6 книг?

ПРАКТИЧЕСКОЕ ЗАНЯТИЕ №16

1.Тема:Решение задач.

2.Количество часов: 2

3. Цель работы:научиться решать задачи используя основные формулы комбинаторики.

4.Необходимые знания для выполнения задания:

Перестановки-соединения, которые можно составить из n предметов, меняя всеми возможными способами их порядок; Количество всех перестановок из n элементов обозначают $P_n = n!$ число их $P_n = 1*2*3*\ldots*n = n!$ Число *n* при этом называется *порядком* перестановки.

Размещения – соединения, содержащие по m предметов из числа n данных, различающихся либо порядком предметов, либо самими предметами; число их.

$A_n^m = \dfrac{n!}{(n-m)!}$ В комбинаторике **размещением** называется расположение “предметов” на некоторых “местах” при условии, что каждое место занято в точности одним предметом и все предметы различны.

Сочетания-соединения, содержащие по m предметов из n, различающиеся друг от друга, по крайней мере, одним предметом; число их $C_n^m = \dfrac{A_n^m}{P_m} = \dfrac{n!}{m!(n-m)!}$. Таким образом, количество вариантов при сочетании будет меньше количества размещений.

5. Задание для практической работы:

1. Решить задачи.

1. Доказать тождество $C_n^k = C_n^{n-k}$.

2. Доказать тождество $C_n^k + C_n^{n-k} = C_{n+1}^{k+1}$.

3. Встретились и обменялись рукопожатиями десять старых друзей. Сколько всего было сделано рукопожатий?

4. На плоскости дано 12 точек, из которых никакие три не лежат на одной прямой. Сколько различных треугольников можно построить с вершинами в этих точках?

5. На плоскости дано 12 точек, из которых 4 лежат на одной прямой. Кроме того, из рассматриваемых точек никакие 3 не лежат на одной прямой. 1) Сколько различных прямых можно провести через эти точки? 2) Сколько можно построить различных треугольников с вершинами в этих точках?

2. Решить задачи с повторениями.

1. Две команды А и Б играют серию матчей по баскетболу до тех пор, пока одна из них не одержит четырех побед (ничьих в баскетболе нет). Сколько различных серий матчей может быть?

2. Сколькими способами можно переставить цифры числа 123589, чтобы между двумя четными цифрами стояли две нечетные.

3. Сколькими способами можно переставить буквы слова «змееед», чтобы три буквы «е» не шли подряд?

4. Сколькими способами можно переставить буквы в слове «шарага», чтобы две буквы «а» не стояли рядом?

ПРАКТИЧЕСКОЕ ЗАНЯТИЕ №17

1.Тема:Вычисление вероятности случайного события.

2.Количество часов: 2

3. Цель работы:научиться решать задачи на вычисление вероятности случайного события.

4.Необходимые знания для выполнения задания:

Операции над событиями

Суммой, или объединением, нескольких событий называется событие, состоящее в наступлении хотя бы одного из этих событий.

Сумма S событий $A, B, C, \ldots, N$ обозначается так:

$$S = A + B + C + \ldots + N.$$

Например, если событие A есть попадание в цель при первом выстреле, событие B — при втором, то событие $C = A + B$ есть попадание в цель вообще, безразлично, при каком выстреле — первом, втором или при обоих вместе.

Произведением, или пересечением, нескольких событий называется событие, состоящее в совместном появлении всех этих событий.

Произведение S событий $A, B, C, \ldots, N$ обозначается

$$S = ABC \ldots N.$$

Классическое определение вероятности случайного события

Для количественного сравнения событий по степени возможности их появления вводится числовая мера, которая называется вероятностью события.

Вероятностью события называется число, являющееся выражением меры объективной возможности появления события.

Вероятность события A будем обозначать символом $P\{A\}$.

Вероятность события A ***равна отношению числа случаев*** m***, благоприятствующих ему, из общего числа*** n ***единственно возможных,***

равновозможных и несовместных случаев к числу n***,*** т. е.

$$P\{A\} = \frac{m}{n}.$$

5. Задание для практической работы:

Решить задачи.

Задача 1. Абонент забыл последнюю цифру номера телефона и поэтому набирает её наугад. Определить вероятность того, что ему придётся звонить не более чем в 3 места.

Задача 2. Абонент забыл последние 2 цифры телефонного номера, но помнит, что они различны и образуют двузначное число, меньшее 30. С учетом этого он набирает наугад 2 цифры. Найти вероятность того, что это будут нужные цифры.

Задача 3. Шесть шаров случайным образом раскладывают в три ящика. Найти вероятность того, что во всех ящиках окажется разное число шаров, при условии, что все ящики не пустые.

Задача 4. На шахматную доску случайным образом поставлены две ладьи. Какова вероятность, что они не будут бить одна другую?

Задача 5. Шесть рукописей случайно раскладывают по пяти папкам. Какова вероятность того, что ровно одна папка останется пустой?

Задача 6. Цифры 1, 2, 3, …, 9, выписанные на отдельные карточки складывают в ящик и тщательно перемешивают. Наугад вынимают одну карточку. Найти вероятность того, что число, написанное на этой карточке: а) четное; б) двузначное.

Задача 7. На полке в случайном порядке расставлено 40 книг, среди которых находится трехтомник Пушкина. Найти вероятность того, что эти тома стоят в порядке возрастания номера слева направо, но не обязательно рядом.

Задача 8. На каждой из пяти одинаковых карточек напечатана одна из следующих букв: "а", "м", "р", "т", "ю". Карточки тщательно перемешаны. Найти вероятность того, что на четырех вынутых по одной карточке можно прочесть слово "юрта".

Задача 9. Ребенок имеет на руках 5 кубиков с буквами: А, К, К, Л, У. Какова вероятность того, что ребенок соберет из кубиков слово "кукла"?

ПРАКТИЧЕСКОЕ ЗАНЯТИЕ №18

1.Тема:Формула полной вероятности. Формула Бейеса.

2.Количество часов: 2

3. Цель работы:научиться решать задачи на вычисление полной вероятности, используя формулу Бейеса.

4.Необходимые знания для выполнения задания:

Если событие *A* может произойти только при выполнении одного из событий $B_1, B_2, \dots, B_n$, которые образуют***полную группу несовместных событий***, то вероятность события *A* вычисляется по формуле

$$P(A) = P(B_1)P(A|B_1) + P(B_2)P(A|B_2) + \dots + P(B_n)P(A|B_n).$$

Эта формула называется ***формулой полной вероятности***.

Вновь рассмотрим полную группу несовместных событий $B_1, B_2, \dots, B_n$, вероятности появления которых $P(B_1), P(B_2), \dots, P(B_n)$. Событие*A* может произойти только вместе с каким-либо из событий $B_1, B_2, \dots, B_n$, которые будем называть***гипотезами***. Тогда по формуле полной вероятности

$$P(A) = P(B_1)P(A|B_1) + P(B_2)P(A|B_2) + \dots + P(B_n)P(A|B_n)$$

Если событие *A* произошло, то это может изменить вероятности гипотез $P(B_1), P(B_2), \dots, P(B_n)$.

По теореме умножения вероятностей

$$P(AB_1) = P(B_1)P(A|B_1) = P(A)P(B|A),$$

откуда

$$P(B_1|A) = \frac{P(B_1)P(A|B_1)}{P(A)}.$$

Аналогично, для остальных гипотез

$$P(B_i|A) = \frac{P(B_i)P(A|B_i)}{P(A)},\ i = 1, \dots, n.$$

Полученная формула называется ***формулой Байеса*** (***формулой Бейеса***). Вероятности гипотез $P(B_i|A)$ называются***апостериорными вероятностями***, тогда как $P(B_i)$ - ***априорными вероятностями***.

5. Задание для практической работы:

Решить задачи.

1.. Являются ли случаями следующие группы событий: а) опыт — бросание монеты; события: *A1* — появление герба; *A2* — появление цифры; б) опыт — бросание двух монет; события: *B1* — появление двух гербов; *B2* — появление двух цифр; *B3* — появление одного герба и одной цифры; в) опыт — бросание игральной кости; события: *C1* — появление не более двух очков; *C2* — появление трех или четырех очков; *C3* —появление не менее пяти очков; г) опыт — выстрел по мишени; события: *D1* — попадание; *D2* — промах; д) опыт — два выстрела по мишени; события: *E0* — ни одного попадания; *E1* — одно попадание; *E2* — два попадания; е) опыт — вынимание двух карт из колоды; события: *F1* — появление двух красных карт; *F2* — появление двух черных карт?

2. В урне А белых и В черных шаров. Из урны вынимают наугад один шар. Найти вероятность того, что этот шар — белый.

3. В урне А белых и *B* черных шаров. Из урны вынимают один шар и откладывают в сторону. Этот шар оказался белым. После этого из урны берут еще один шар. Найти вероятность того, что этот шар тоже будет белым.

4. В урне А белых и В черных шаров. Из урны вынули один шар и, не глядя, отложили в сторону. После этого из урны взяли еще один шар. Он оказался белым. Найти вероятность того, что первый шар, отложенный в сторону, — тоже белый.

5. Из урны, содержащей А белых и В черных шаров, вынимают один за другим все шары, кроме одного. Найти вероятность того, что последний оставшийся в урне шар будет белым.

6. Из урны, в которой А белых шаров и В черных, вынимают подряд все находящиеся в ней шары. Найти вероятность того, что вторым по порядку будет вынут белый шар.

7. В урне А белых и В черных шаров (A>2). Из урны вынимают сразу два шара. Найти вероятность того, что оба шара будут белыми.

8. В урне А белых и В черных шаров (А > 2, В > 3). Из урны вынимают сразу пять шаров. Найти вероятность p того, что два из них будут белыми, а три черными.

9. В партии, состоящей из X изделий, имеется I дефектных. Из партии выбирается для контроля I изделий. Найти вероятность p того, что из них ровно J изделий будут дефектными.

10. Игральная кость бросается один раз. Найти вероятность следующих событий: A — появление четного числа очков; B — появление не менее 5 очков; C— появление не более 5 очков.

11. Игральная кость бросается два раза. Найти вероятность p того, что оба раза появится одинаковое число очков.

12. Бросаются одновременно две игральные кости. Найти вероятности следующих событий: A — сумма выпавших очков равна 8; B — произведение выпавших очков равно 8;C— сумма выпавших очков больше, чем их произведение.

13. Бросаются две монеты. Какое из событий является более вероятным: A — монеты лягут одинаковыми сторонами; B — монеты лягут разными сторонами?

14. В урне А белых и В черных шаров (A>2; В >2). Из урны вынимают одновременно два шара. Какое событие более вероятно: A — шары одного цвета; B — шары разных цветов?

15. Трое игроков играют в карты. Каждому из них сдано по 10 карт и две карты оставлены в прикупе. Один из игроков видит, что у него на руках 6 карт бубновой масти и 4 — не бубновой. Он сбрасывает две карты из этих четырех и берет себе прикуп. Найти вероятность того, что он прикупит две бубновые карты.

16. Из урны, содержащей n перенумерованных шаров, наугад вынимают один за другим все находящиеся в ней шары. Найти вероятность того, что номера вынутых шаров будут идти по порядку: 1, 2,..., n.

17. Та же урна, что и в предыдущей задаче, но каждый шар после вынимания вкладывается обратно и перемешивается с другими, а его номер записывается. Найти вероятность того, что будет записана естественная последовательность номеров: 1, 2,..., п.

18. Полная колода карт (52 листа) делится наугад на две равные пачки по 26 листов. Найти вероятности следующих событий: A — в каждой из пачек окажется по два туза; B — в одной из пачек не будет ни одного туза, а в другой — все четыре; C—*в* одной из пачек будет один туз, а в другой — три.

19. В розыгрыше первенства по баскетболу участвуют 18 команд, из которых случайным образом формируются две группы по 9 команд в каждой. Среди участников соревнований имеется 5 команд экстра-класса. Найти вероятности следующих событий: *A* —все команды экстра-класса попадут в одну и ту же группу; *B* — две команды экстра-класса попадут в одну из групп, а три — в другую.

20. На девяти карточках написаны цифры: 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8. Две из них вынимаются наугад и укладываются на стол в порядке появления, затем читается полученное число, например 07(семь), 14 (четырнадцать) и т. п. Найти вероятность того, что число будет четным.

ПРАКТИЧЕСКОЕ ЗАНЯТИЕ №19

1.Тема:Повторные и независимые испытания.
2.Количество часов: 2
3. Цель работы:научиться решать задачи на вычисление вероятности повторного и независимого испытания.
4.Необходимые знания для выполнения задания:
Испытания называются независимыми, если вероятность того или иного исхода каждого испытания не зависит от того, какие исходы имели другие испытания. Независимые испытания могут проводиться как в одинаковых условиях, так и в различных. В первом случае вероятность появления некоторого события во всех испытаниях одна и та же, во втором случае она меняется от испытания к испытанию.

Примеры независимых повторных испытаний:

- выйдет из строя один из узлов прибора или два, три узла, причём выход из строя каждого узла не зависит от другого узла, а вероятность выхода из строя одного узла постоянна во всех испытаниях;
- произведённая в некоторых постоянных технологических условиях деталь, или три, четыре, пять деталей, окажутся нестандартными, причём одна деталь может оказаться нестандартной независимо от любой другой детали и вероятность того, что деталь окажется нестандатной, постоянна во всех испытаниях;
- из нескольких выстрелов по мишени один, три или четыре выстрела попадают в цель независимо от исходов других выстрелов и вероятность попадания в цель постоянна во всех испытаниях;
- при опускании монеты автомат сработает правильно один, два или другое число раз независимо от того, какой результат имели другие опускания монеты, и вероятность того, что автомат сработает правильно, постоянна во всех испытаниях.

Эти события можно описать одной схемой. Каждое событие наступает в каждом испытании с одной и той же вероятностью, которая не изменяется, если становятся известными результаты предыдущих испытаний. Такие испытания называются независимыми, а схема называется *схемой Бернулли*. Предполагается, что такие испытания могут быть повторены как угодно большое количество раз.

Если вероятность p наступления события A в каждом испытании постоянна, то вероятность $P_{m,n}$ того, что в n независимых испытаниях событие A наступит m раз, находится по *формуле Бернулли*:

$P_{m,n} = C_n^m p^m q^{n-m}$ (где $q = 1 - p$ - вероятность того, что событие не наступит)

или

$$P_{m,n} = \frac{n!}{m!(n-m)!} p^m q^{n-m}.$$

Поставим задачу – найти вероятность того, что событие такого типа в n независимых испытаниях наступит m раз.

5. Задание для практической работы:

1. В первом загоне находятся 10 овец, из которых 2 — белые, остальные — черные, а во втором загоне — 7 белых и 3 черных овцы. Между загонами есть переход, и одна из овец первого загона перешла во второй. Переход закрыли и из второго загона отобрали одну овцу для стрижки. Какова вероятность того, что пойманная овца оказалась из первого загона, если известно, что она белая?

2. В трех коробках лежат конфеты «Белочка», произведенные на двух фабриках «Рассвет» и «Заря». В первой коробке 30% конфет фабрики «Заря», во второй — 40%, а в третьей — 50%. Наугад выбрали коробку и из нее наугад вынули конфету. Какова вероятность, что извлеченная конфета была а) из первой коробки, б) из второй коробки, в) из третьей коробки, если известно, что она оказалась произведенной на фабрике «Заря»?

3. В десяти ящиках упаковано по 100 одинаковых по форме латунных и бронзовых шариков, причем доля латунных шариков образует арифметическую прогрессию с начальным количеством m_0=10 латунных шариков в первом ящике и разностью также d=10 шариков, так что в ящике № 2 — 20 латунных шариков, в ящике № 3 — 30 и т.д. Наудачу выбранный шарик оказался латунным. Какова вероятность, что он был извлечен а) из ящика № 2? б) из ящика № 8? Все ящики по виду неотличимы.

ПРАКТИЧЕСКОЕ ЗАНЯТИЕ №20

1.Тема:Случайная величина. Закон распределения.

2.Количество часов: 2

3. Цель работы:научиться вычислять элементы математической статистики.

4.Необходимые знания для выполнения задания:

*Пример 1: Прибыл вагон с пшеницей и требуется определить количество (долю) клейковины в ее зернах. Все зерна вагона называются генеральной совокупностью. Однако исследованию будут подвергнуты не все зерна, а какая-то их часть. Эта часть называется **выборочной совокупностью**, или просто **выборкой**. Понятно, что выборка должна хорошо отражать свойства всей пшеницы вагона, т.е. должна быть **репрезентативной**. Например, если для исследования одного вагона взяли десяток зерен из одной точки вагона, а для исследования другого вагона взяли пять проб по сто зерен из разных точек*

Таблица 14.3

X — исследуемый признак (размер)	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30	31	32	Контроль
m — частота	1	2	1	2	2	6	8	11	6	3	3	3	2	$\sum m_i = 50 = n$
$w = \frac{m}{n}$ — относительная частота	0,02	0,04	0,02	0,04	0,04	0,12	0,16	0,22	0,12	0,06	0,06	0,06	0,04	$\sum w_i = 1$

Введем ряд важных понятий, используемых в статистике, на примере вариационного ряда табл. 14.2.

Размахом выборки *R* называется разность между ее наибольшим и наименьшим значениями. В данном случае $R = 32 - 20 = 12$.

Модой выборки *Mo* называется значение случайной величины, встречающееся в выборке чаще всего. В данном случае $Mo = 27$.

Медианой выборки *Me* называется среднее число (т.е. стоящее на среднем месте в выборке), если количество чисел нечетное и среднее арифметическое двух срединных чисел, если их количество в выборке четное. В нашем примере на 25 и 26 местах стоит размер 27,

значит, $Me = \dfrac{27+27}{2} = 27$.

Средним значением $\overline{X}$ выборки X называется среднее арифметическое всех ее значений: $\overline{X} = \dfrac{x_1 + x_2 + \dots x_n}{n}$. В нашем примере:

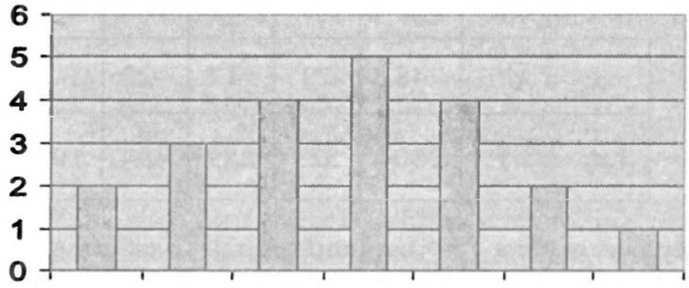
$$X = \frac{20 + 21 + 21 + 22 + 22 + \dots + 32 + 32}{50} =$$

$$= \frac{20\cdot1+21\cdot2+22\cdot1+23\cdot2+24\cdot2+25\cdot6+26\cdot8+27\cdot11+28\cdot6+31\cdot3+32\cdot2+29\cdot3+30\cdot3}{50} =$$

$$= \frac{1335}{50} = 26,7.$$

5. Задание для практической работы:

1. Жалобы на опоздания электричек, поступившие в диспетчерскую станции Семафорово в течение недели, позволили составить следующую диаграмму частот по опозданиям за неделю:



Определите среднее число опозданий в день за неделю и среднеквадратичное отклонение.

2. На стройку с кирпичного завода привезли 20 упаковок кирпича. Чтобы проверить качество партии, из каждой упаковки вытащили случайным образом по кирпичу и замерили длину каждого. Ниже представлены полученные величины (в см): 20,5; 20,1; 21,3; 20,3; 19,8; 19,2; 20,1; 19,6; 20,2; 20; 20,5; 19,7; 19,9; 20,5; 19,6; 20,1; 19,4; 19,8; 19,1; 20,3.

а) Определите среднюю длину кирпича.

в) Какой процент кирпичей, длина которых отличается ы от средней больше, чем на 0,2 см? Больше чем на величину среднеквадратичного отклонения?

3. Пасечник заметил, что пчелы в двух его ульях производят мед неравномерно. Раз в 10 дней он вынимал соты из улья и заносил в таблицу массу (в кг) снятого меда, выработанного пчелами за десять дней.

а) Пчелы какого из ульев работают более стабильно? (Сделайте вывод, вычислив величину среднеквадратичного отклонения количества произведенного меда.)

б) Если в первом улье живет 100 пчел, а во втором 75 пчел, то сколько в среднем произвела меду за период с 19 по 28 августа каждая пчела 1 и 2 улья?

Интервалы времени	Масса меда (в кг)	
	1-й улей	2-й улей
С 20 по 30 апреля	11,4	11,9
С 1 апреля по 10 мая	12	10,8
С 11 по 20 мая	11,5	13,2
С 21 по 30 мая	11,7	12,6
С 31 мая по 9 июня	11	11,1
С 10 по 19 июня	10,6	11,4
С 20 по 29 июня	13,1	13,2
С 30 июня по 9 июля	12,8	12,9
С 10 по 19 июля	11,9	13,5
С 20 по 29 июля	13	10,9
С 30 июля по 8 августа	12,5	12,3
С 9 по 18 августа	12,9	11,7
С 19 по 28 августа	11,6	12
С 29 августа по 8 сентября	12	10,5

4. Литература

Основные источники:

1. Богомолов Н.В. Математика: Учебник для ссузов. М.: Дрофа, 2015.
2. Богомолов Н.В. Сборник задач по математике: Учебное пособие для ссузов. М.: Дрофа, 2015.

Интернет ресурсы:

1. Единое окно доступа к образовательным ресурсам. Электронная библиотека [Электронный ресурс]. — Режим доступа: http://window.edu.ru/window, свободный. — Загл. с экрана.
2. Российская национальная библиотека [Электронный ресурс]. — Режим доступа: http:// nlr.ru/lawcenter, свободный. — Загл. с экрана.
3. Электронные библиотеки России /pdf учебники студентам [Электронный ресурс].— Режим доступа: http://www.gaudeamus.

Дополнительные источники:

1. Матвеев Н.М. Сборник задач и упражнений по обыкновенным дифференциальным уравнениям: Учебное пособие, 7-е изд., доп.- СПб.: Издательство «Лань», 2002. – 432 с. – (Учебники для вузов. Специальная литература).
2. Выгодский М.Я. Справочник по высшей математике. -М.: Наука, 1987.
3. Ляшко И.И., Боярчук А.К., Гай Я.Г., Головач Г.П. Справочное пособие по высшей математике. Т.1: Математический анализ: введение в анализ, производная, интеграл. – М.: Едиториал УРСС, 2004. – 360 с.
4. Спирина М.С. Теория вероятностей и математическая статистика: учебник для студ. учреждений сред. проф. образования / М.С. Спирина, П.А. Спирин. – М.: Издательский центр «Академия», 2013. – 352 с.