

**Министерство образования Иркутской области  
Государственное бюджетное профессиональное образовательное учреждение  
Иркутской области  
«Иркутский техникум транспорта и строительства»**

**МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ  
для выполнения практических работ  
по учебной дисциплине ОП.02 Техническая механика**

**специальность среднего профессионального образования  
23.02.06 «Техническая эксплуатация подвижного состава»**

**Квалификация:**

техник

**Форма обучения:** очная

**Нормативный срок обучения:** 3 года 10 месяцев  
на базе основного общего образования

Иркутск, 2024

Методические рекомендации для практических работ составлены на основании рабочей программы по дисциплине ОП.02 Техническая механика

Разработчик: Иринчеева Е.В., преподаватель

Рассмотрено и одобрено на заседании  
ДЦК  
Протокол № 9 от 28.05.2024г.  
Председатель ДЦК: Е.В. Иринчеева

## Содержание

**Практическая работа №1:** «Решение задач на равновесие сил в аналитической форме».

**Практическое занятие 2** Определение главного вектора и главного момента произвольной плоской системы сил.

**Практическая работа №3:** Плоская система произвольно расположенных сил.

**Практическое занятие 3** Определение реакции в опорах балочных систем с проверкой правильности решения

**Практическое занятие 4** Определение центра тяжести плоских фигур

**Практическое занятие № 5** «Общие теоремы динамики».

**Практическое занятие 6** Определение диаметра вала из условия прочности при кручении

**Практическое занятие 7** Построение эпюр поперечных сил и изгибающих моментов.

**Практическое занятие 8** Выполнение расчетов на жесткость при изгибе

**Практическая работа 9** Проверка параметров червячного редуктора

**Практическое занятие 10** Выполнение расчета прямозубых передач и определение параметров зубчатых колес

Список рекомендуемой литературы.

## Практическая работа № 1 Решение задач на равновесие сил в аналитической форме

**Тема:** Определение усилий в стержнях простейшей стержневой конструкции от приложенной внешней нагрузки.

**Цель:** Изучение условия равновесия плоской системы сходящихся сил, определение усилий в стержневых конструкциях аналитическим и геометрическим (графическим) способами.

### **Теоретические сведения:**

Систему сил, линии, действия которых расположены в одной плоскости и пересекаются в одной точке, называют плоской системой сходящихся сил.

Необходимым и достаточным условием равновесия плоской системы сходящихся сил является равенство нулю равнодействующей этой системы сил. Это условие можно выразить двумя алгебраическими равенствами:

$$\sum X_i = 0; \quad \sum Y_i = 0. \quad (1)$$

Равенства (1) выражают условие равновесия плоской системы сходящихся сил в аналитической форме и их называют уравнениями равновесия плоской системы сходящихся сил. Таким образом, для равновесия плоской системы сходящихся сил необходимо и достаточно, чтобы алгебраические суммы проекций всех сил системы на координатные оси были равны нулю.

Условие равновесия плоской системы сходящихся сил в геометрической форме выражается в условии замкнутости многоугольника данных сил.

Преимущества аналитического способа проекций перед геометрическим способом построения силового многоугольника особенно заметны в задачах на равновесие системы более трех сил (решение силового многоугольника представляет известные трудности).

**Задание:** Определить величину и направление реакций связей от приложенной внешней нагрузки (реакции нити и стержня принято называть усилиями). Задачу решить аналитическим и геометрическим (графическим) способами. Данные для задачи своего варианта взять из таблицы 1 и схемы на рисунке 1.

К решению задачи можно приступить после изучения темы «Условие равновесия плоской системы сходящихся сил». Необходимо твердо усвоить три способа решения задач на равновесие плоской системы сходящихся сил: аналитический, геометрический и графический. Графическую часть работы выполнить карандашом на отдельном листе формата А-4, выбрать и указать на чертеже масштаб сил, лист снабдить рамкой на расстоянии 5 мм от края. Надписи выполнять чертежным шрифтом (см. пример выполнения задания).

### **Методические указания к решению задачи.**

При решении задачи аналитическим способом рекомендуется придерживаться следующего порядка:

1. Выделить тело (или точку), равновесие которого следует рассмотреть.
2. Изобразить активные (заданные) силы, действующие на выделенное тело.
3. Освободить тело от наложенных на него связей, заменив их действие реакциями связей (усилиями), неизвестные усилия направить от узла, предположив, что стержни растянуты.
4. Выбрать положение прямоугольной системы координат. Начало координат совместить с точкой, равновесие которой будем рассматривать.

Координатные оси по возможности направлять по неизвестным силам, тогда проекция неизвестной силы на ось, перпендикулярную ей, окажется равной нулю. Благодаря этому, уменьшится число неизвестных в уравнении, равновесия, и решение его упростится.

5. Определить углы между усилиями и координатными осями, указать на чертеже.
6. Составить уравнения равновесия плоской системы сходящихся сил:

$$\sum X_i = 0; \quad \sum Y_i = 0.$$

При проектировании силы на ось следует модуль силы умножить на косинус острого угла между линией действия силы и осью независимо от того, с каким направлением оси (положительным или отрицательным) он образован.

Полученное произведение имеет знак плюс, если проектируемая сила совпадает с положительным направлением оси, и знак минус – если не совпадает.

7. Решить составленные уравнения равновесия относительно искомых величин.

При решении задачи геометрическим (графическим) способом необходимо построить замкнутый силовой многоугольник (треугольник), построение которого начинают с заданных сил, а затем достраивают неизвестные силы.

8. Решить силовой многоугольник (определить неизвестные стороны, которые представляют собой неизвестные усилия в стержнях) или, если силовой многоугольник построен в масштабе, определить искомые силы по масштабу.

### Ход работы

Аналитический способ решения.

Рассмотрим равновесие шарнира \_\_\_\_. К нему приложена активная сила вес груза  $F$ . Отбросим связи и заменим действие связей их реакциями  $R_1$  и  $R_2$ .

Направим искомые усилия от узла \_\_\_\_, тем самым предположив стержни растянутыми. Если же в результате решения то или иное из них получится отрицательным, то это значит, что предположенное направление усилия неправильное и, следовательно, усилие является сжимающим.

Для равновесия узла \_\_\_\_ должна равняться нулю алгебраическая сумма проекций всех приложенных к нему сил на любые две непараллельные оси.

Совместим начало координат с точкой \_\_\_\_, проведем ось  $X$  по стержню \_\_\_\_, а ось  $Y$  перпендикулярно ей.

Составим уравнения равновесия, для системы сходящихся сил в узле  $B$ :

$$\sum X_i = 0; \underline{\hspace{10cm}}$$

$$\sum Y_i = 0. \underline{\hspace{10cm}}$$

---

После подстановки числовых значений известных величин получим

---

$$R_1 = \underline{\hspace{5cm}} \quad R_2 = \underline{\hspace{5cm}}.$$

Геометрический (графический) способ решения.

Выбираем масштаб сил \_\_\_\_\_ и строим замкнутый силовой многоугольник (треугольник). Из произвольной точки  $a$  проводим отрезок  $ab$ , параллельный и равный в принятом масштабе силе  $F$ , затем из точки  $a$  проводим прямую параллельно стержню \_\_\_\_, до взаимного пересечения с прямой, проведенной из точки  $b$  параллельно стержню \_\_\_\_\_. Полученный силовой треугольник замкнутый, следовательно, все стрелки в нем направлены в одну сторону по обходу силового треугольника. Направление обхода определяется направлением заданной силы  $F$ . Стороны этого треугольника  $ac$  и  $bc$  представляют собой величины и направления усилий  $R_1$  и  $R_2$  в стержнях конструкции соответственно. По масштабу определим  $R_1 = \underline{\hspace{5cm}}$  и  $R_2 = \underline{\hspace{5cm}}$ . Совершая обход треугольника в направлении силы  $F$ , замечаем, что полученные направления реакций стержней \_\_\_\_ совпадают с первоначально выбранными, следовательно стержень \_\_\_\_ растянут (сжат), стержень \_\_\_\_ растянут (сжат).

Модули  $R_1$  и  $R_2$ . можно также определить геометрически используя

---

---

---

---

---

---

---

Сравним результаты двух решений и вычислим в процентах относительную погрешность графического решения по формуле:

$$\delta = \left| \frac{R_{gp} - R_{ан}}{R_{ан}} \right| \times 100\% =$$

Относительная погрешность не должна превышать 5%.

Вывод: \_\_\_\_\_

---

---

**Определение усилий в стержнях конструкции**  
Графический способ                      Масштаб сил: \_\_\_\_\_

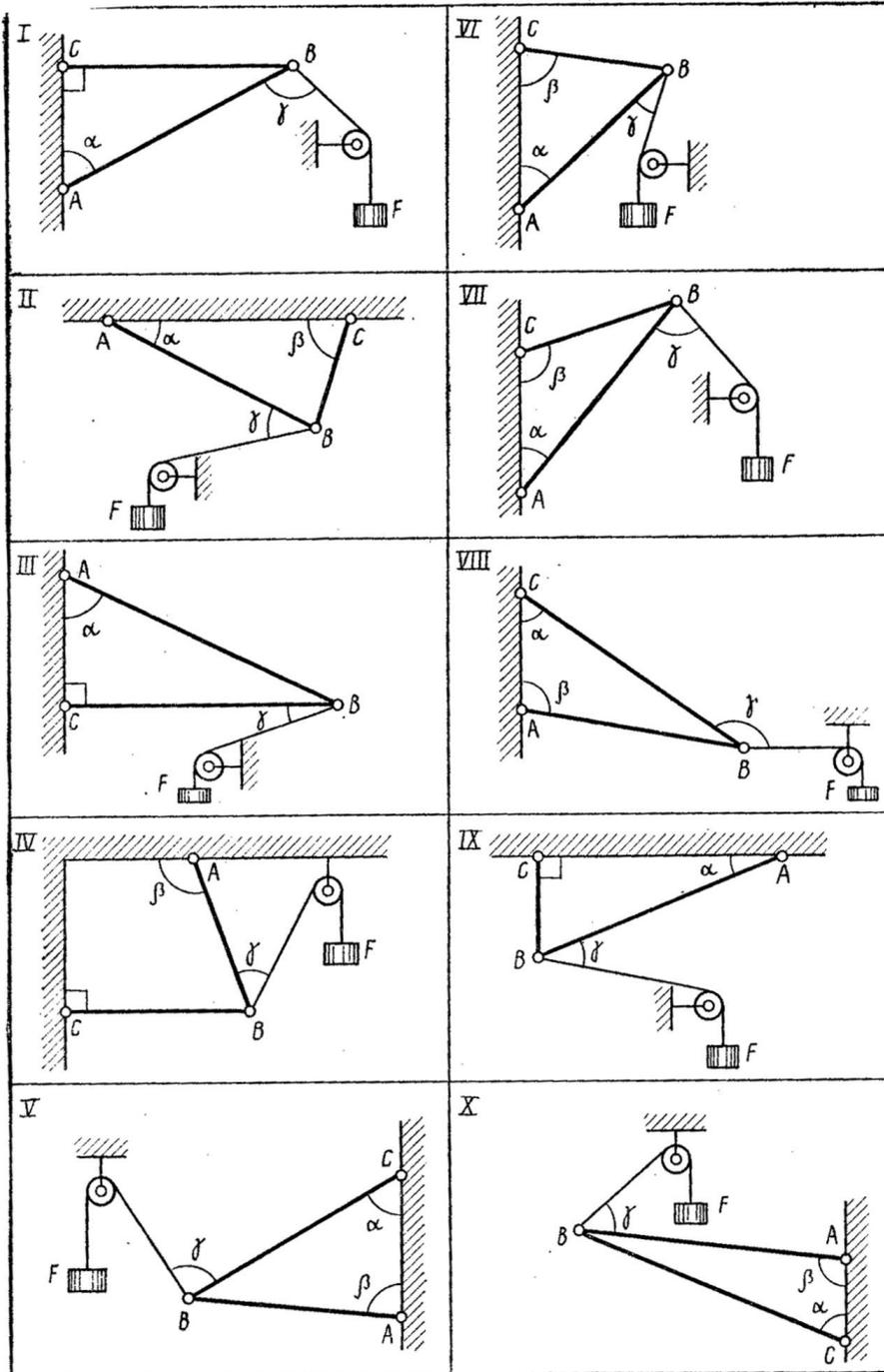


Таблица № 1

Вариант	Схема	Сила $F$ (кН)	УГЛЫ в градусах		
			$\alpha$	$\beta$	$\gamma$
1	II	50	30	60	30
Тросом 2	III	50	45	90	90
3	IV	50	90	120	45
4	VI	50	60	30	45

5	V	50	30	60	90
6	VIII	50	45	120	90
7	VII	50	45	120	90
8	X	50	30	120	60
9	IX	50	30	90	60
10	II	60	60	30	60
11	I	60	60	90	90
12	III	60	30	90	60
13	IV	60	90	120	60
14	VI	60	30	60	30
15	V	60	60	90	90
16	VIII	60	30	120	90
17	VII	60	60	120	90
18	X	60	60	60	60
19	IX	100	30	90	60
20	II	100	30	60	60
21	I	100	60	90	120
22	IV	100	90	120	30
23	III	100	60	90	30
24	VI	100	60	90	30
25	V	100	30	60	90

### Пример решения задачи.

Тросом, перекинутым через блок **A**, поддерживаемый шарнирно-стержневой конструкцией **ВАС**, с постоянной скоростью поднимается груз **G**.

Определить усилия в стержнях **AB** и **AC** конструкции, пренебрегая размерами блока и трением в нем. Дано:  $G = 2 \text{ кН}$ .  $\alpha = 30^\circ$ ,  $\beta = 60^\circ$ ,  $\gamma = 45^\circ$ .

#### *Аналитический способ решения.*

Рассмотрим равновесие шарнира **A**. Мысленно вырежем узел **A** и изобразим его со всеми действующими на него известными и искомыми силами.

Искомые усилия  $R_1$  и  $R_2$  направим от узла **A**, предположив, что стержни растянуты. Для равновесия узла **A** должна равняться нулю алгебраическая сумма проекций всех приложенных к нему сил на любые две непараллельные оси. Совместим начало координат с точкой **A**, проведем ось **X** по стержню **AB**, а ось **Y** перпендикулярно оси **X** вдоль стержня **AC**.

Составим уравнения равновесия, для системы сходящихся в узле **A** сил.

$$\sum X_i = 0; \quad G \cdot \cos 60^\circ - R_2 - F \cdot \cos 45^\circ = 0; \quad 2 \cdot 0,5 - R_2 - 2 \cdot 0,707 = 0;$$
$$R_2 = -0,414 \text{ кН.}$$

$$\sum Y_i = 0. \quad -R_1 - G \cdot \cos 30^\circ - F \cdot \cos 45^\circ = 0; \quad -R_1 - 2 \cdot 0,866 - 2 \cdot 0,707 = 0;$$
$$R_1 = -3,144 \text{ кН.}$$

В результате решения искомые усилия  $R_1$  и  $R_2$  получились отрицательными, это значит, что предположенное направление усилий неверное и, следовательно, оба стержня работают на сжатие.

#### *Геометрический (графический) способ решения:*

Рассмотрим равновесие узла **A**, из четырех сил, действующих на узел **A** известны натяжение вертикальной ветви троса, равное весу груза **G** и направленное вертикально вниз и натяжение наклонной ветви троса, которое из-за отсутствия трения в блоке равно по абсолютной величине натяжению вертикальной ветви троса ( $G = F = 2 \text{ кН}$ ). Для определения искомых усилий.

$R_1$  и  $R_2$  выбираем масштаб сил  $\mu = 0,5 \text{ кН./см}$ . и строим замкнутый силовой многоугольник сил. Из произвольной точки **a** проводим отрезок **ав**, параллельный и равный в принятом масштабе силе **G**, из точки **в** проводим отрезок **вс**, параллельный и равный второй известной силе **F**; затем из точки **a** проводим прямую, параллельно стержню **AC**, до взаимного пересечения с прямой, проведенной из точки **с** параллельно стержню **AB**.

Полученный силовой многоугольник **авсda** замкнутый, следовательно все стрелки в нем должны идти в одну сторону по обходу силового многоугольника, причем направление этого обхода определяется направлением известных сил **G** и **F**. Стороны этого многоугольника **cd** и **da** дают величины и направления усилий  $R_1$  и  $R_2$  в стержнях **AC** и **AB** соответственно. По масштабу находим, что  $R_1 = 3,145 \text{ кН}$  и  $R_2 = 0,425 \text{ кН}$ .

Совершая обход многоугольника, замечаем, что полученные направления усилий не совпадают с первоначально выбранными, следовательно, оба стержня сжимаются.

Модули усилий  $R_1$  и  $R_2$  можно определить также по теореме синусов:

Рассмотрим треугольник **аве** сторона **се**  $= \sqrt{2} \cdot R_2$ ;

По теореме синусов:  $(F - \sqrt{2} \cdot R_2) / \sin 30^\circ = G / \sin 45^\circ$ ;

$$(2 - 1,414 R_2) \cdot 0,707 = 2 \cdot 0,5; \quad R_2 = 1,414 - 1; \quad R_2 = 0,414 \text{ кН.}$$

Из этого же треугольника запишем другое соотношение и определим  $\mathbf{R}_1$ .

По теореме синусов:  $(\mathbf{R}_1 - \mathbf{R}_2) / \sin 105^\circ = G / \sin 45^\circ$ ;

$\mathbf{R}_1 - \mathbf{R}_2 = 2,732$ ;  $\mathbf{R}_1 = 2,732 + 0,414 = 3,146$  кН.

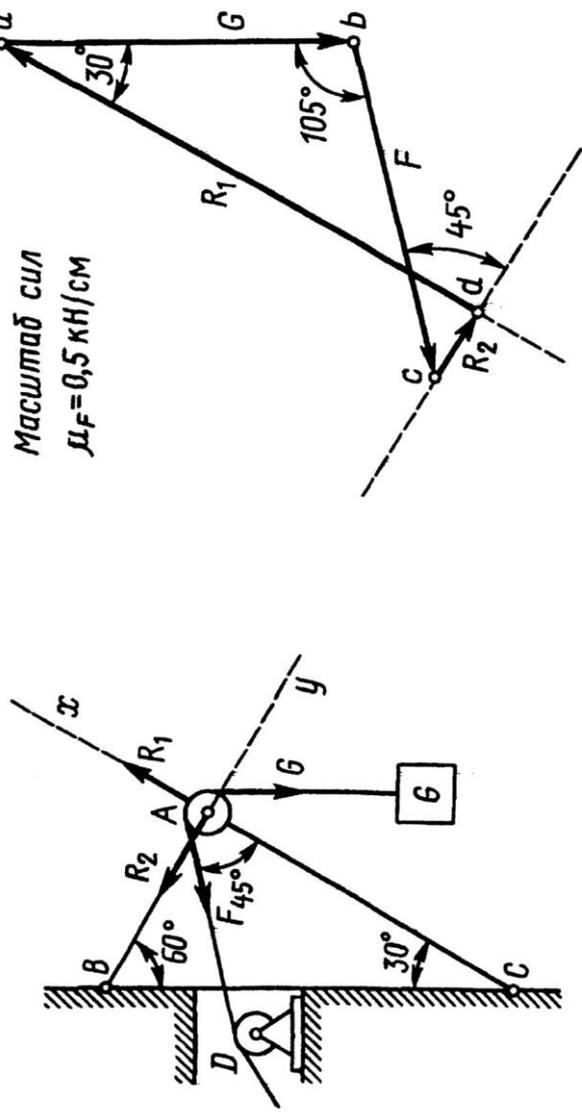
**Ответ:**  $\mathbf{R}_1 = 3,146$  кН.

$\mathbf{R}_2 = 0,414$  кН.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ СИЛ В СТЕРЖНЯХ

Дано:  $G = 2 \text{ кН}$ ,  $\alpha = 60^\circ$ ,  $\beta = 30^\circ$ ,  $\gamma = 45^\circ$

Масштаб сил  
 $\mu_F = 0,5 \text{ кН/см}$



Силы в стержнях:

$$R_1 = ad \cdot \mu_F = 6,29 \text{ см} \times 0,5 \text{ кН/см} = 3,145 \text{ кН},$$

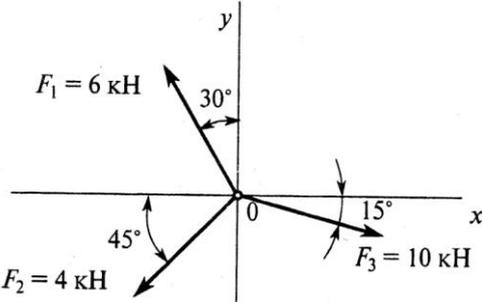
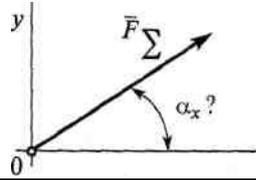
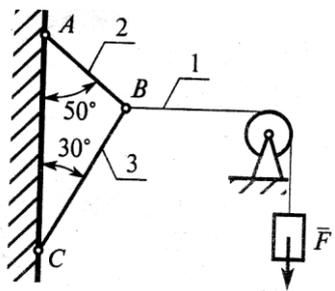
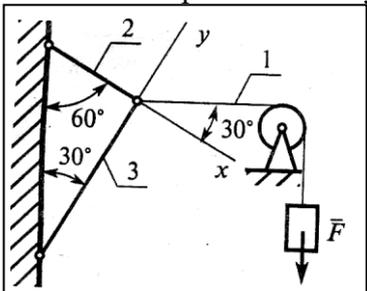
$$R_2 = cd \cdot \mu_F = 0,85 \text{ см} \times 0,5 \text{ кН/см} = 0,425 \text{ кН}.$$

Относительная погрешность:

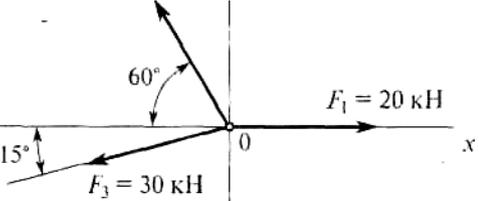
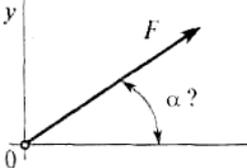
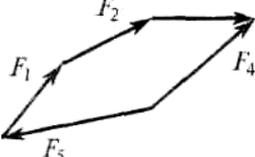
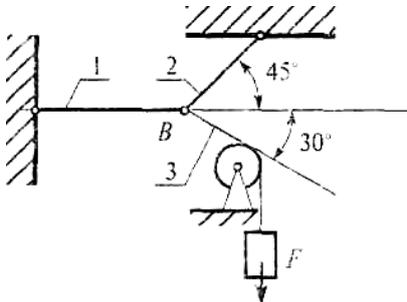
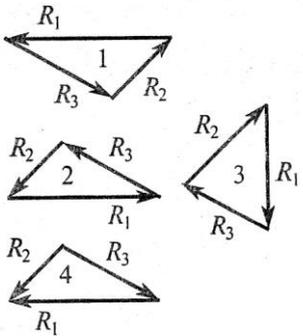
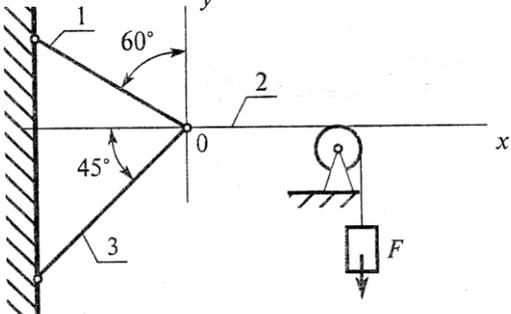
$$\delta_1 = 0, \delta_2 = \frac{0,425 - 0,414}{0,414} \cdot 100 = 2,66 \%$$

## Контрольные тесты к работе 1.

### Плоская система сходящихся сил

Вопросы	О т в е т ы	Код
<p>1. Определить проекцию равнодействующей на ось x</p> 	26, 54 кН	1
	3, 87 кН	2
	6, 28 кН	3
	Верный ответ не приведен	4
<p>2. Определить направление равнодействующей силы (<math>\alpha_x</math>) по ее проекциям на оси x и y  <math>F_{\Sigma x} = 25</math> Н; <math>F_{\Sigma y} = 9,9</math> Н</p> 	14° 30'	1
	64° 15'	2
	21° 40'	3
	Верный ответ не приведен	4
<p>3. Сходящаяся система 4-х сил, действующих на балку, уравновешена  <math>F_{1y} = 16</math> Н; <math>F_{2y} = -46</math> Н; <math>F_{3y} = 36</math> Н;  <math>\sum F_{kx} = 0</math> Определить величину <math>F_{4y}</math></p>	16 Н	1
	- 6 Н	2
	6 Н	3
	1 Н	4
<p>4. Груз F находится в равновесии. Указать, какой из силовых треугольников для шарнира В построен верно</p> 	1	1
	2	2
	3	3
	4	4
<p>5. Груз находится в равновесии. Указать, какая система уравнений равновесия верна в этом случае</p> 	$\sum F_{kx} = R_1 \cos 60^\circ + R_2 = 0$ $\sum F_{ky} = R_3 + R_1 \cos 30^\circ = 0$	1
	$\sum F_{kx} = R_1 \cos 30^\circ - R_2 = 0$ $\sum F_{ky} = R_3 + R_1 \cos 60^\circ = 0$	2
	$\sum F_{kx} = R_1 \cos 30^\circ - R_2 = 0$ $\sum F_{ky} = -R_3 + R_1 \cos 60^\circ = 0$	3
	Верный ответ не приведен	4

### Плоская система сходящихся сил

Вопросы	Ответы	Код
<p>6. Определить величину равнодействующей силы</p> 	<p>39, 5 кН</p> <p>44, 4 кН</p> <p>19, 5 кН</p> <p>Верный ответ не приведен</p>	<p>1</p> <p>2</p> <p>3</p> <p>4</p>
<p>7. По известным проекциям на оси координат x и y определить угол наклона равнодействующей к оси Ox  <math>F_{\Sigma x} = 15</math> кН; <math>F_{\Sigma y} = 8,66</math> кН</p> 	<p>30°</p> <p>20°</p> <p>60°</p> <p>75°</p>	<p>1</p> <p>2</p> <p>3</p> <p>4</p>
<p>8. Какой вектор силового многоугольника является равнодействующей силой?</p> 	<p>F2</p> <p>F4</p> <p>F5</p> <p>F1</p>	<p>1</p> <p>2</p> <p>3</p> <p>4</p>
<p>9. Груз F находится в равновесии. Указать, какой из треугольников для шарнира В построен верно</p> 		<p>1</p> <p>2</p> <p>3</p> <p>4</p>
<p>10. Груз F находится в равновесии. Указать, какая система уравнений равновесия верна в этом случае</p> 	<p><math>\sum F_{kx} = R_2 - R_1 \cos 60^\circ - R_3 \cos 45^\circ = 0</math>  <math>\sum F_{ky} = R_1 \cos 60^\circ - R_3 \cos 45^\circ = 0</math></p> <p><math>\sum F_{kx} = R_2 - R_1 \cos 30^\circ - R_3 \cos 45^\circ = 0</math>  <math>\sum F_{ky} = R_1 \cos 60^\circ - R_3 \cos 45^\circ = 0</math></p> <p><math>\sum F_{kx} = R_1 \cos 30^\circ - R_3 \cos 45^\circ + R_2 = 0</math>  <math>\sum F_{ky} = R_3 \cos 45^\circ - R_1 \cos 60^\circ = 0</math></p> <p>Верный ответ не приведен</p>	<p>1</p> <p>2</p> <p>3</p> <p>4</p>

## Практическая работа №2.

Определение главного вектора и главного момента произвольной плоской системы сил.

*Цель: Иметь представление о главном векторе, главном моменте, знать теорему Пуансо о приведении силы к точке приведения произвольной плоской системы сил к точке, три формы уравнений равновесия.*

*Уметь заменять произвольную плоскую систему сил одной силой и одной парой*

### Теорема Пуансо о параллельном переносе сил.

Силу можно перенести параллельно линии ее действия, при этом нужно добавить пару сил с моментом, равным произведению модуля силы на расстояние, на которое перенесена сила.

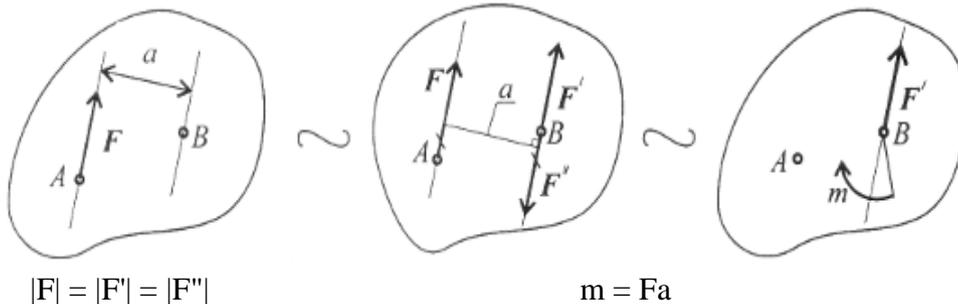


Рис.1.

Дано: сила в точке А (рис.1).

Добавим в точку В уравновешенную систему сил ( $F'$ ;  $F''$ ). Образуется пара сил ( $F'$ ;  $F''$ ). Получим силу в точке В и момент пары  $m$ .

### Приведение к точке плоской системе произвольно расположенных сил.

Линии действия произвольной системы сил не пересекаются в одной точке, поэтому для оценки состояния тела такую систему следует упростить. Для этого все силы системы переносят в одну произвольно выбранную точку – точку приведения. Применяют теорему Пуансо. При любом переносе в точку, не лежащую на линии ее действия, добавляют пару сил.

Появившиеся при переносе пары называют присоединенными парами.

Дана плоская система произвольно расположенных сил (рис.2).

Переносим все силы в точку О. получим пучок сил в точке О, который можно заменить одной силой – главным вектором системы. Образующуюся систему пар сил можно заменить одной эквивалентной парой – главным моментом системы.

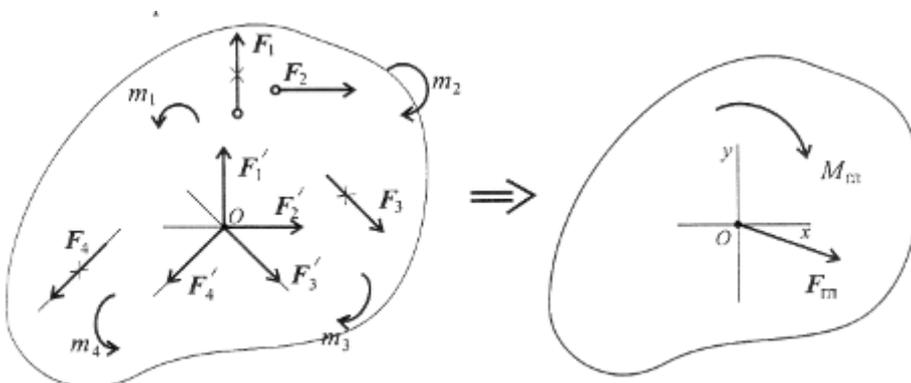


Рис.2

$$F_{ГЛ} = \sum_{k=0}^n F_k$$

Главный вектор равен геометрической сумме векторов произвольной плоской системой системы сил. Проецируем все силы системы на оси координат и, сложив соответствующие проекции на оси, получим проекции главного вектора.

$$F_{ГЛx} = \sum_0^n F_{kx}; \quad F_{ГЛy} = \sum_0^n F_{ky}$$

По величине проекций главного вектора на оси координат находим модуль главного вектора:

$$F_{ГЛ} = \sqrt{F_{ГЛx}^2 + F_{ГЛy}^2}.$$

Главный момент системы сил равен алгебраической сумме момента сил системы относительно точки приведения.

$$M_{ГЛo} = m_1 + m_2 + m_3 + \dots + m_n;$$

$$M_{ГЛo} = \sum_0^n m_o(F_k).$$

Таким образом, произвольная плоская система сил приводится к одной силе (главному вектору системы сил) и одному моменту (главному моменту системы сил).

### Условие равновесия произвольной плоской системы сил.

1. При равновесии главный вектор системы равен нулю  $F_{ГЛ} = 0$ . Аналитическое определение главного вектора приводит к выводу:

$$F_{ГЛ} = \sqrt{F_{ГЛx}^2 + F_{ГЛy}^2} = 0 \implies \begin{cases} \sum_0^n F_{kx} = 0; \\ \sum_0^n F_{ky} = 0, \end{cases}$$

где  $F_{kx}$  и  $F_{ky}$  – проекции векторов на оси координат.

2. Поскольку точка приведения выбрана произвольно, ясно, что при равновесии сумма моментов сил системы относительно любой точки на плоскости должна равняться нулю:

$$M_{ГЛo} = \sum_0^n m_o(F_k) = 0 \implies \begin{cases} \sum_0^n m_A(F_k) = 0; \\ \sum_0^n m_B(F_k) = 0, \end{cases}$$

где А и В – разные точки приведения.

Условие равновесия произвольной плоской системы сил может быть сформулировано следующим образом:

Для того чтобы твердое тело под действием произвольной плоской системы сил находилось в равновесии, необходимо и достаточно, чтобы алгебраическая сумма проекций всех сил системы на любую ось равнялась нулю и алгебраическая сумма моментов всех сил системы относительно любой точки в плоскости действия сил равнялась нулю.

Получим основную форму уравнения равновесия:

$$\left\{ \begin{array}{l} \sum_0^n F_{kx} = 0; \\ \sum_0^n F_{ky} = 0; \\ \sum_0^n m_A(\mathbf{F}_k) = 0; \\ \sum_0^n m_B(\mathbf{F}_k) = 0; \\ \sum_0^n m_C(\mathbf{F}_k) = 0 \end{array} \right\} \text{уравнения моментов.}$$

Теоретически уравнений моментов можно записать бесконечное множество, практически доказано, что на плоскости можно составить только три независимых уравнения моментов и при этом три точки (центры моментов) не должны лежать на одной линии.

Таким образом, имеем пять независимых уравнений равновесия.

Практически для решения задач на плоскости достаточно трех уравнений равновесия. В каждом конкретном случае используются уравнения с одним неизвестным.

Для разных случаев используются три группы уравнений

$$\text{Первая форма уравнений равновесия: } \left\{ \begin{array}{l} \sum_0^n F_{kx} = 0; \\ \sum_0^n F_{ky} = 0; \\ \sum_0^n m_A(\mathbf{F}_k) = 0. \end{array} \right.$$

равновесия

$$\text{Вторая форма уравнений равновесия: } \left\{ \begin{array}{l} \sum_0^n F_{ky} = 0; \\ \sum_0^n m_A(\mathbf{F}_k) = 0; \\ \sum_0^n m_B(\mathbf{F}_k) = 0. \end{array} \right.$$

$$\text{Третья форма уравнений равновесия: } \left\{ \begin{array}{l} \sum_0^n m_A(\mathbf{F}_k) = 0; \\ \sum_0^n m_B(\mathbf{F}_k) = 0; \\ \sum_0^n m_C(\mathbf{F}_k) = 0. \end{array} \right.$$

Для частного случая, если уравновешена система параллельных сил, можно составить только два уравнения равновесия:

$$\sum_0^n F_{kx} = 0; \quad \sum_0^n m_A(\mathbf{F}_k) = 0.$$

Ось  $Ox$  системы координат параллельна линии действия сил.

### Примеры решения задач

**Пример 1.** Найти момент присоединенной пары при переносе силы  $F_3$  в точку  $B$  (рис.3)  $F_1 = 10\text{кН}$ ;  $F_2 = 15\text{кН}$ ;  $F_3 = 18\text{кН}$ ;  $a = 0,2\text{м}$ .

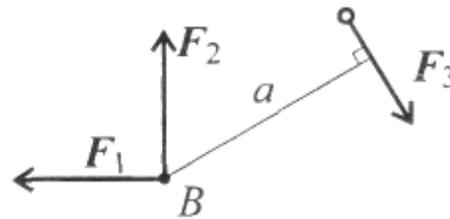


рис.3.

Решение

Используем теорему Пуансо.

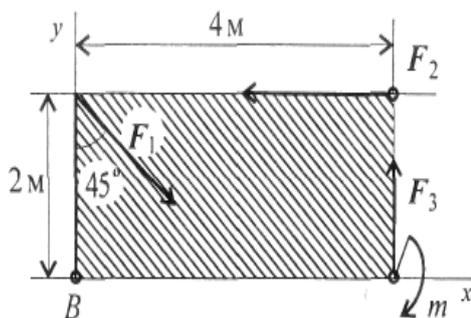
$$M_B(F_3) = 18 \cdot 0,2 = 3,6\text{кНм}.$$

**Пример 2.** Найти главный вектор системы (рис.4).

$F_1 = 10\text{кН}$ ;  $F_2 = 16\text{кН}$ ;  $F_3 = 12\text{кН}$ ;  $m = 60\text{кНм}$ .

Решение

Главный вектор равен геометрической сумме сил:



$$F_{\text{гл}x} = \sum_0^n F_{kx};$$

$$F_{\text{гл}x} = F_1 \cos 45^\circ - F_2 = -9\text{кН};$$

$$F_{\text{гл}y} = \sum_0^n F_{ky};$$

$$F_{\text{гл}y} = -F_1 \cos 45^\circ + F_3 = 5\text{кН};$$

$$F_{\text{гл}} = \sqrt{F_{\text{гл}x}^2 + F_{\text{гл}y}^2};$$

$$F_{\text{гл}} = \sqrt{(-9)^2 + 5^2} \approx 10\text{кН}.$$

Рис.4.

## Практическая работа №3

### «Определение реакции в опорах балочных систем с проверкой правильности решения»

**Цель:** научиться определять реакции в опорах балочных систем с проверкой правильности решения

#### Последовательность решения задачи

1. Балку освободить от связей (связи) и их (его) действие заменить силами реакций.
2. Выбрать координатные оси.
3. Составить и решить уравнения равновесия.

Реакции опор можно определить, исходя из трех форм уравнений равновесия:

$$\begin{array}{lll} \text{a)} & \sum F_{ix} = 0; & \text{б)} & \sum F_{iy} = 0; & \text{в)} & \sum M_A = 0; \\ & \sum F_{iy} = 0; & & \sum M_A = 0; & & \sum M_B = 0; \\ & \sum M_A = 0; & & \sum M_B = 0; & & \sum M_C = 0. \end{array}$$

4. Проверить правильность решения задачи. Проверку необходимо производить по тому уравнению равновесия, которое не было использовано при решении данной задачи (задача решена правильно лишь в том случае, если после постановки значений активных и реактивных сил в уравнение равновесия выполняется условие равновесия).

5. Сделать анализ решенной задачи (если при решении задачи реакции опор или реактивный момент получается отрицательным, то их действительное направление противоположно принятому).

**Пример 1.** Определить реакции опор балки, если известно

$F = 20 \text{ кН}$ ,  $M = 10 \text{ кН}\cdot\text{м}$ ,  $q = 1 \text{ кН/м}$  (рис. 1).

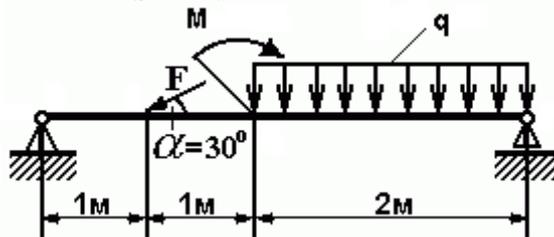


Рис. 1 - Схема задачи

#### Решение:

1. Изображаем балку вместе с нагрузками.
2. Выбираем расположение координатных осей, совместив ось X с балкой, а ось Y направив перпендикулярно оси X.
3. Производим необходимые преобразования заданных активных сил: силу, накопленную к оси балки под углом α, заменяем двумя взаимно перпендикулярными составляющими

$$F_x = F \cdot \cos 30^\circ = 20 \cdot 0,866 = 17,32 \text{ кН}$$

$$F_y = F \cdot \sin 30^\circ = 20 \cdot 0,5 = 10 \text{ кН},$$

а равномерно распределенную нагрузку - её равнодействующей

$$Q = q \cdot CD = 1 \cdot 2 = 2 \text{ кН},$$

Равнодействующая Q приложена в середине участка CD, в точке К (рис. 2).

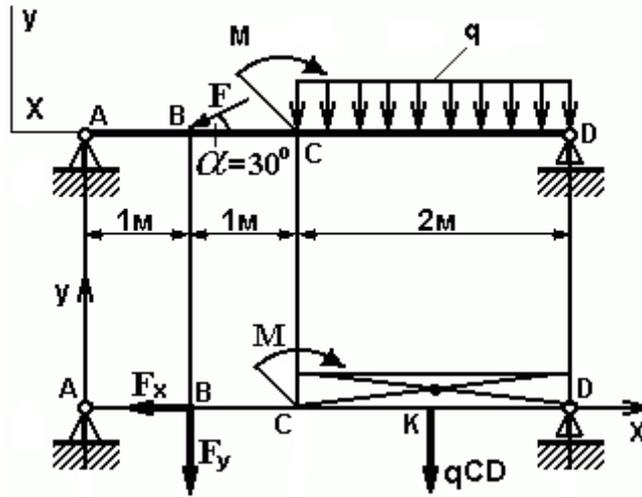


Рис. 2 - Схема преобразования заданных активных сил

4. Освобождаем балку от опор, заменив их опорными реакциями, направленными вдоль выбранных осей координат (рис 3).

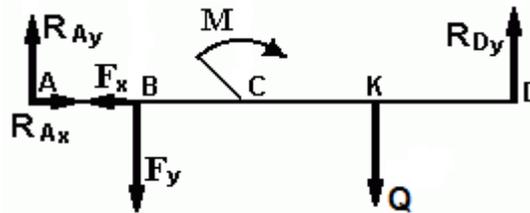


Рис. 3 - Схема реакций балки

5. Составляем уравнения равновесия статики для произвольной плоской системы сил таким образом и в такой последовательности, чтобы решением каждого из этих уравнений было определение одной из неизвестных реакций опор и определяем неизвестные реакции опор.

$$\sum M_A = 0; F_y \cdot AB + M + Q \cdot AK - R_{Dy} \cdot AD = 0 \quad (1)$$

$$\sum M_D = 0; R_{Ay} \cdot AD - F_y \cdot BD + M - Q \cdot KD = 0 \quad (2)$$

$$\sum F_{ix} = 0; R_{Ax} - F_x = 0 \quad (3)$$

6. Определяем реакции опор балок  $R_{Ay}$ ,  $R_{Dy}$  и  $R_{Ax}$  решая уравнения.

Из уравнения (1) получаем

$$R_{Dy} = F_y \cdot AB + M + Q \cdot AK / AD = 10 \cdot 1 + 10 + 2 \cdot 3 / 4 = 6,5 \text{ кН}$$

Из уравнения (2) получаем

$$R_{Ay} = F_y \cdot BD - M + Q \cdot KD / AD = 10 \cdot 3 - 10 + 2 / 4 = 5,5 \text{ кН}$$

Из уравнения (3) получаем

$$R_{Ax} = F_x = F \cdot \cos 30^\circ = 20 \cdot 0,866 = 17,32 \text{ кН}$$

7. Проверяем правильность найденных результатов:

$$\sum F_{iy} = 0; R_{Ay} - F_y - Q + R_{Dy} = 5,5 - 10 - 2 + 6,5 = 0$$

Условие равновесия  $\sum F_{iy} = 0$  выполняется, следовательно, реакции опор найдены верно.

**Пример 2.** Определить реакции заделки, если известно

$F = 20 \text{ кН}$ ,  $M = 10 \text{ кН}\cdot\text{м}$ ,  $q = 1 \text{ кН/м}$  (рис. 4).

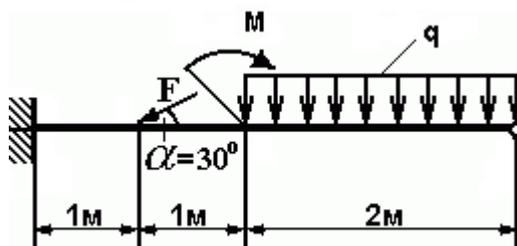


Рис. 4 - Схема задачи

**Решение:**

1. Изображаем балку вместе с нагрузками.

2. Выбираем расположение координатных осей, совместив ось  $X$  с балкой, а ось  $Y$  направив перпендикулярно оси  $X$ .

3. Производим необходимые преобразования заданных активных сил: силу, накопленную к оси балки под углом  $\alpha$ , заменяем двумя взаимно перпендикулярными составляющими

$$F_x = F \cdot \cos 30^\circ = 20 \cdot 0,866 = 17,32 \text{ кН}$$

$$F_y = F \cdot \sin 30^\circ = 20 \cdot 0,5 = 10 \text{ кН},$$

а равномерно распределенную нагрузку - её равнодействующей

$$Q = q \cdot CD = 1 \cdot 2 = 2 \text{ кН},$$

Равнодействующая  $Q$  приложена в середине участка  $CD$ , в точке  $K$  (рис. 5).

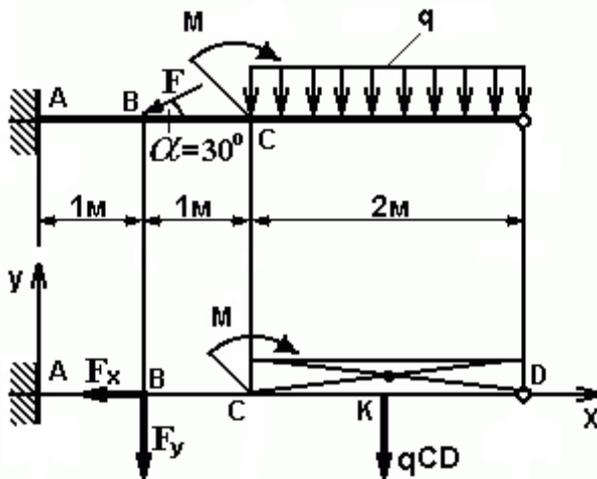


Рис. 5 - Схема преобразования заданных активных сил

4. Освобождаем балку от заделки, заменив её опорными реакциями, направленными вдоль выбранных осей координат и реактивным моментом (моментом заделки,  $M_3$ ) (рис 6).

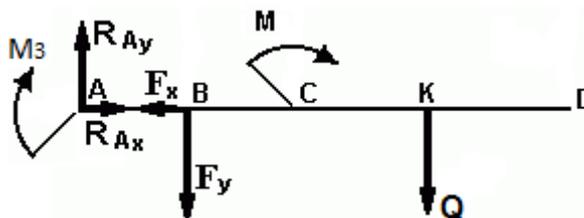


Рис. 6 - Схема реакций балки

5. Составляем уравнения равновесия статики для произвольной плоской системы сил таким образом и в такой последовательности, чтобы решением каждого из этих уравнений было определение одной из неизвестных реакций опор и определяем неизвестные реакции опор.

$$\sum M_A = 0; \quad M_3 + F_y \cdot AB + M + Q \cdot AK = 0 \quad (1)$$

$$\sum M_B = 0; \quad M_3 + R_{Ay} \cdot AB + M + Q \cdot BK = 0 \quad (2)$$

$$\sum F_{ix} = 0; \quad R_{Ax} - F_x = 0 \quad (3)$$

6. Определяем реакции опор балки  $R_{Ax}$ ,  $R_{Ay}$  и момента заделки  $M_3$  решая уравнения.

Из уравнения ( 1 ) получаем

$$M_3 = - F_y \cdot AB - M - Q \cdot AK = - 10 \cdot 1 - 10 - 2 \cdot 3 = - 26 \text{ кН}\cdot\text{м}$$

Из уравнения ( 2 ) получаем

$$R_{Ay} = - Q \cdot BK - M - M_3 / AB = - 2 \cdot 2 - 10 - (-26) / 1 = 12 \text{ кН}$$

Из уравнения ( 3 ) получаем

$$R_{Ax} = F_x = F \cdot \cos 30^\circ = 20 \cdot 0,866 = 17,32 \text{ кН}$$

7. Проверяем правильность найденных результатов:

$$\sum F_{iy} = 0; \quad R_{Ay} - F_y - Q = 12 - 10 - 2 = 0$$

Условие равновесия  $\sum F_{iy} = 0$  выполняется, следовательно, реакции опоры найдены верно.

**Задача 1.** Определить реакции опор двухопорной балки (рисунок 7). Данные своего варианта взять из таблицы 1

Таблица 1 - Исходные данные

Номер схемы на рисунке 7										$F$	$q$	$M$
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10			
Варианты										кН	кН/м	кНм
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	20	2	28
11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	30	4	8
21	22	23	24	25	26	27	28	29	30	40	2	24

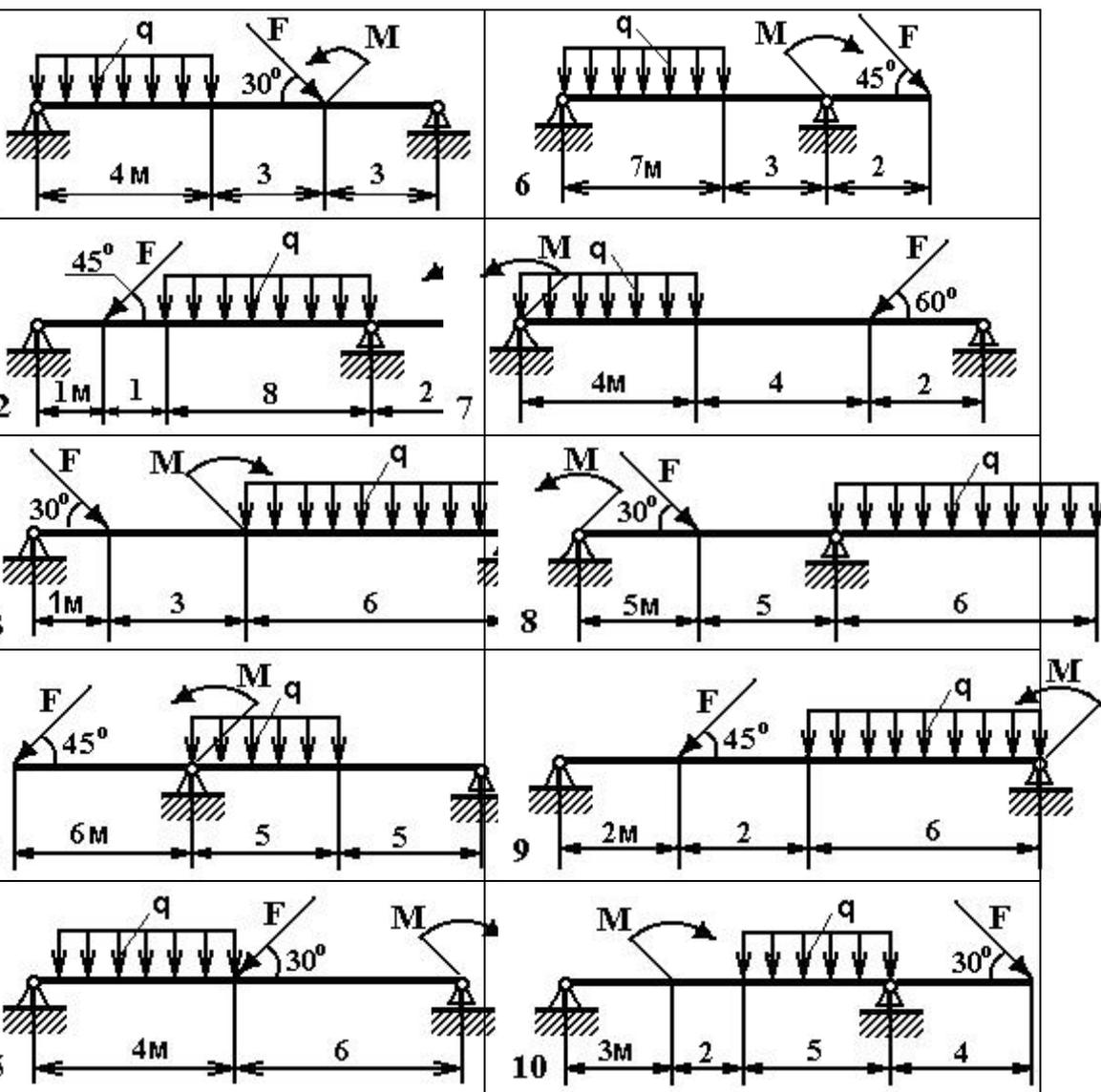


Рис. 7 - Схема задачи

**Задача 2.** Определить реакции заделки (рисунок 8). Данные своего варианта взять из таблицы 1

Таблица 1 - Исходные данные

Номер схемы на рисунке 8										$F$	$q$	$M$
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10			
Варианты										кН	кН/м	кНм

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	16	2	38
11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	22	2	12
21	22	23	24	25	26	27	28	29	30	34	2	14

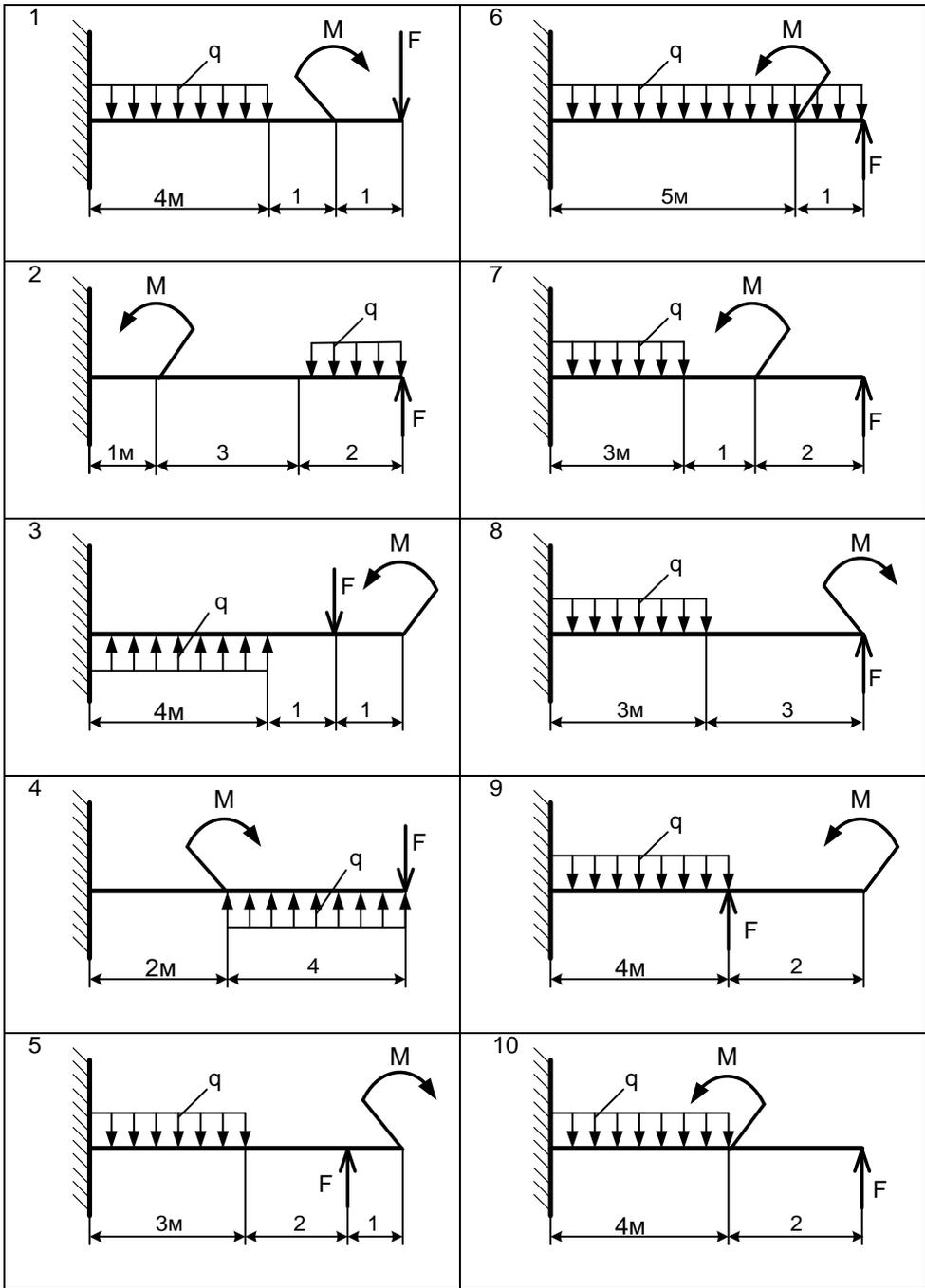
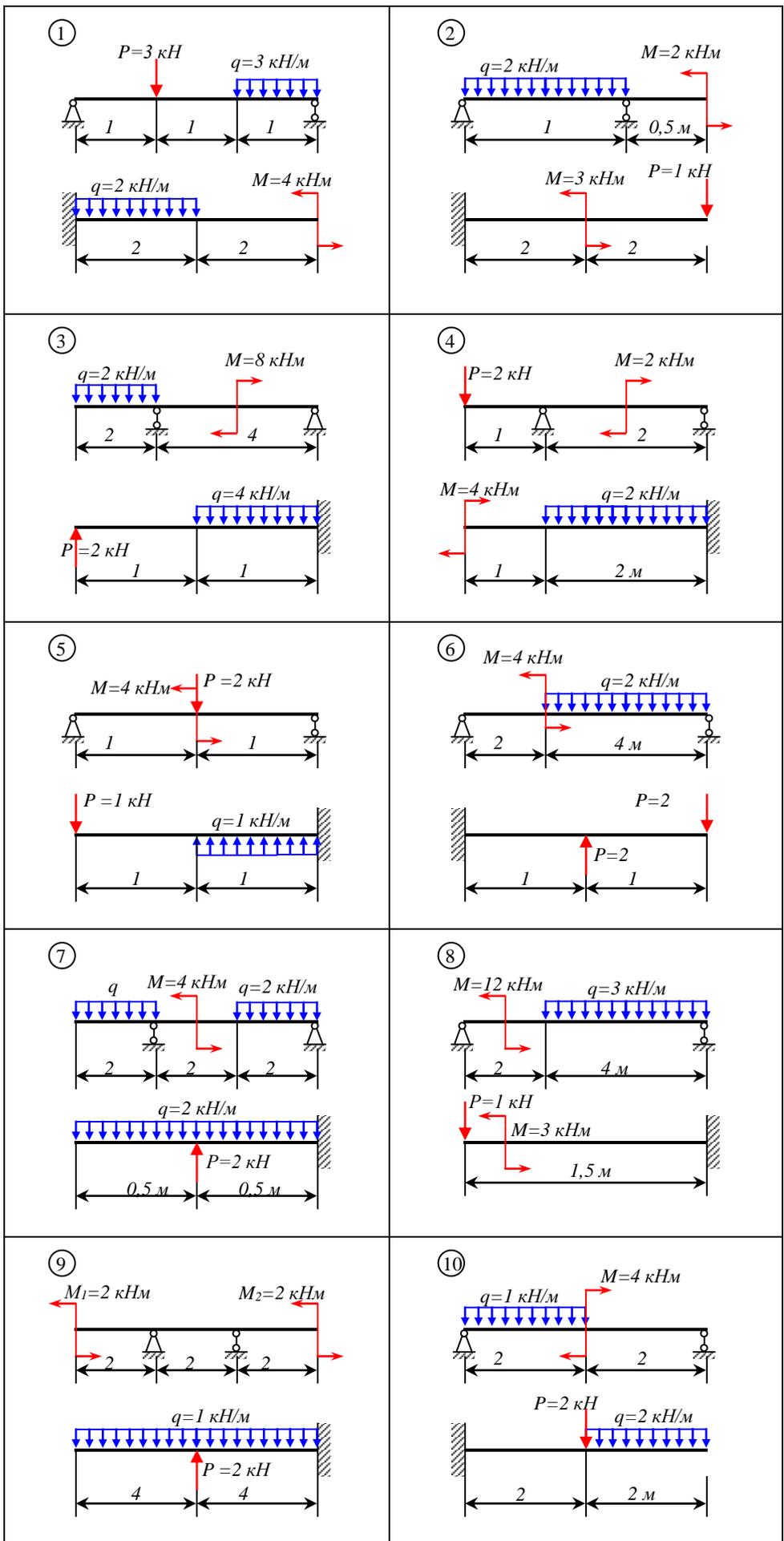
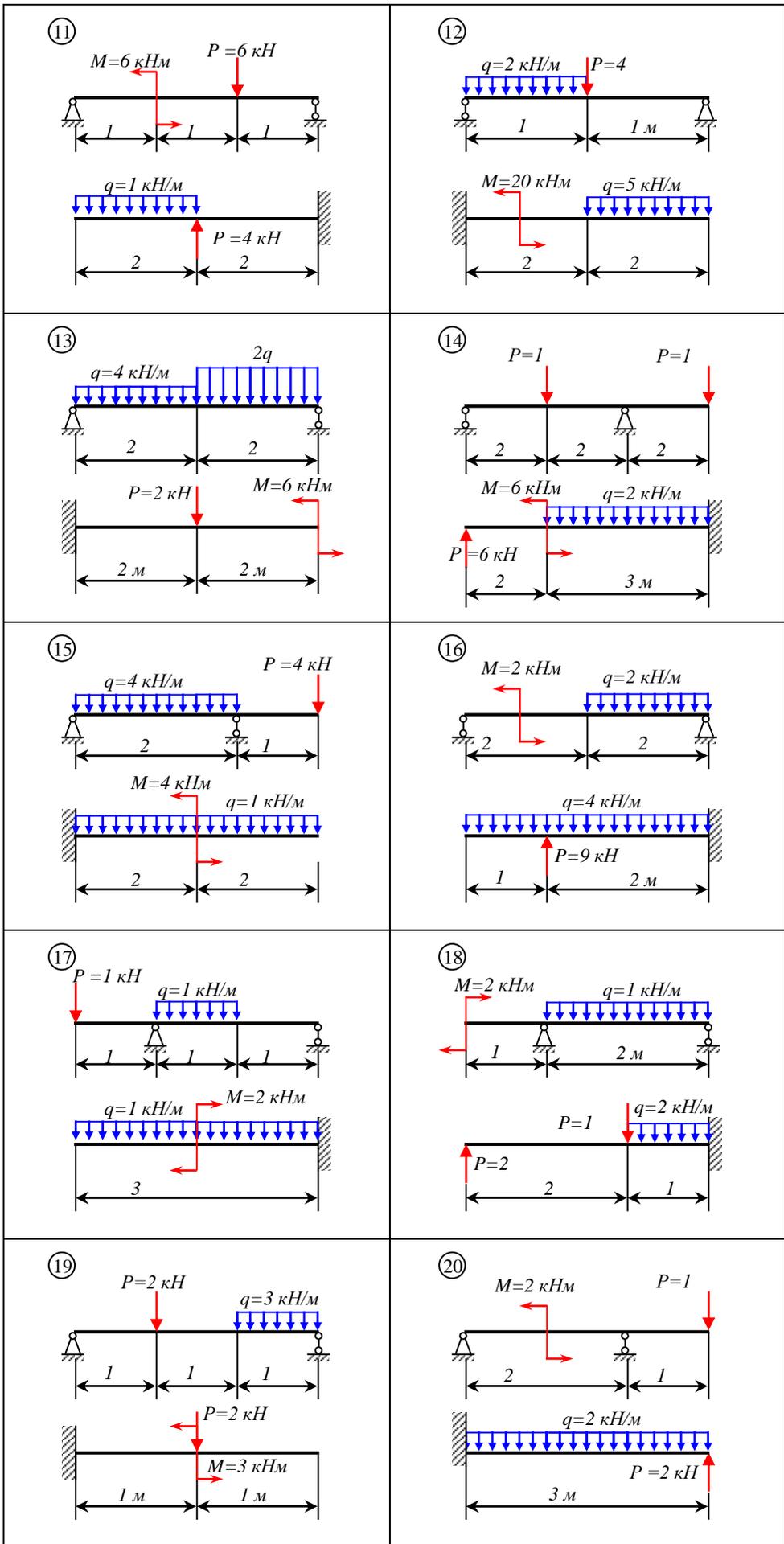


Рис. 8 - Схема задачи

**Задача 3.** Определить реакции опор балки (рисунок 9).





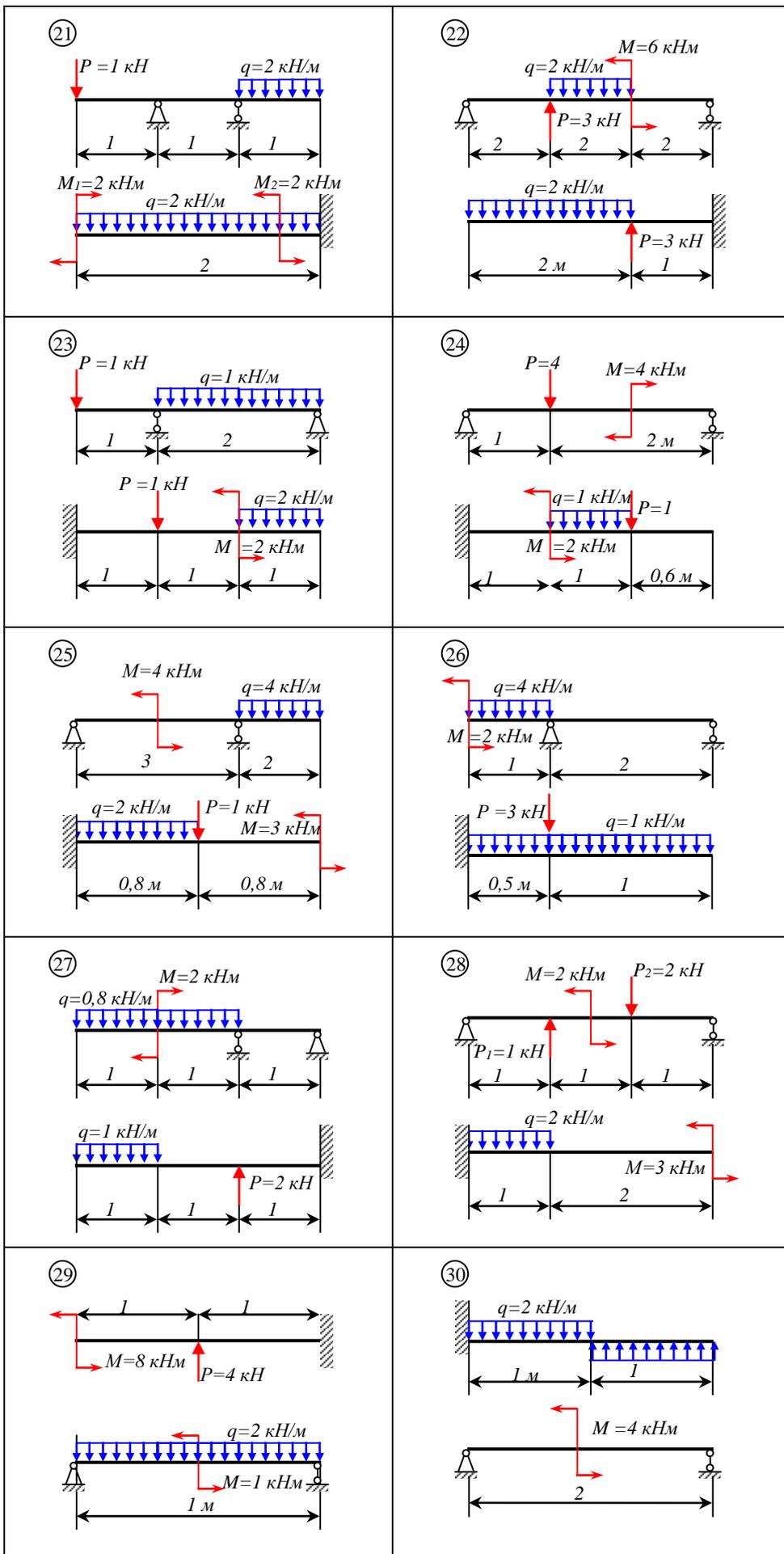


Рис. 9 - Схема задачи

## Практическое занятие 4

### Практическое занятие 4 Определение центра тяжести плоских фигур

**Цель работы** – научиться определять положение центра тяжести сложных плоских фигур, составленных из простых геометрических фигур и из профилей стандартного проката с одной или двумя осями симметрии.

**В результате выполнения работы студент должен:**

**знать** методы определения центра тяжести тела и плоских сечений, формулы для определения центра тяжести плоских сечений;

**уметь** определять координаты центра тяжести сложных геометрических фигур, определять положение центра тяжести фигур, составленных из стандартных профилей.

#### Теоретическое обоснование:

#### Основные формулы и предпосылки расчета

Центры тяжести простейших сечений (рис. 1)

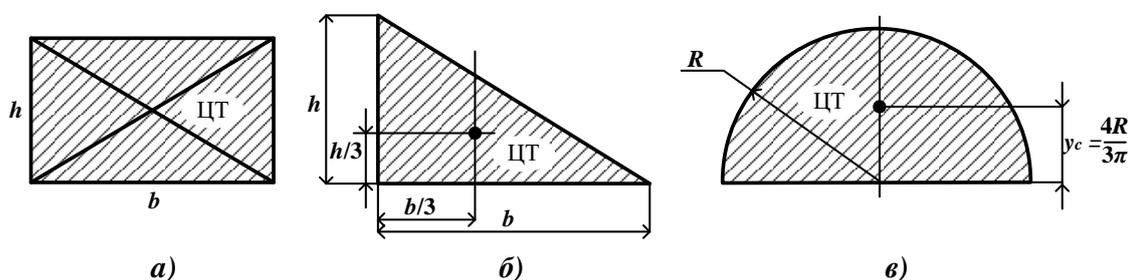


Рис. 1

Геометрические характеристики стандартных прокатных профилей в Приложении 1.  
Методы расчета:

- 1) метод симметрии;
- 2) метод разделения на простые части;
- 3) метод отрицательных площадей.

Координаты центров тяжести сложных и составных сечений:

$$x_c = \frac{\sum_0^n A_k x_k}{A}; \quad y_c = \frac{\sum_0^n A_k y_k}{A}.$$

где  $A_k$  – площади частей сечения;  $x_k$ ;  $y_k$  – координаты ЦТ частей сечения;  $A$  – суммарная площадь сечения,  $A = \sum A_k$ .

**Пример 1.** Требуется определить положение центра тяжести сечения геометрической формы.

**Решение.** Положение центра тяжести фигуры сложной формы можно определить, разбив эту фигуру на пять элементов простой формы, положения центров тяжести которых известны (рис. 2):

- I – прямоугольник 25X30 см с центром тяжести  $C_1$ ;
- II – прямоугольник 55X10 см с центром тяжести  $C_2$ ;
- III – прямоугольник 25X15 см с центром тяжести  $C_3$ ;
- IV – два треугольника с центрами тяжести  $C_4$  и  $C_4$ .

Нанесем на сечение координатные оси. Ось  $y$  совместим с осью симметрии сечения. Ось  $x$  проводим перпендикулярно ей по нижней грани сечения.

Поскольку сечение симметрично относительно вертикальной оси и, следовательно,  $x_c = 0$ , потребуется определить только ординату  $y_c$  центра тяжести по формуле  $y_c = S_x / A$ , где  $A$  – площадь сечения;  $S_x$  – статический момент сечения относительно оси  $x$ , определяется как сумма произведений плоских фигур на ординаты центра тяжести.

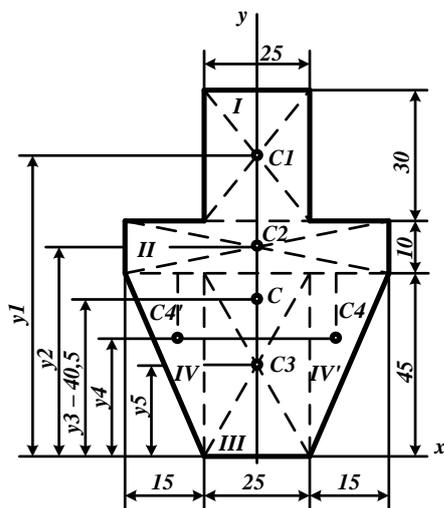


Рис. 2

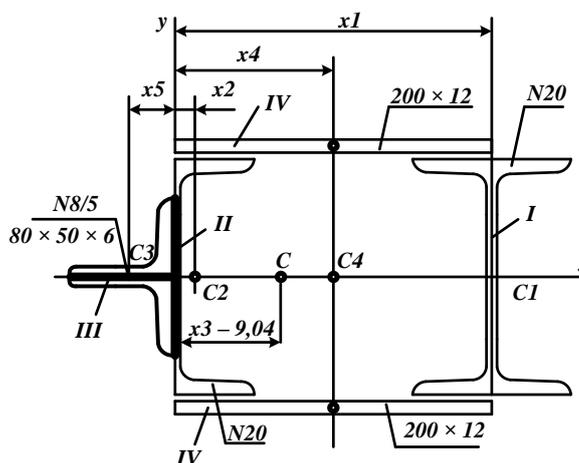


Рис. 3

Определяем площади составных частей фигуры и координаты их центров тяжести относительно выбранной оси, исходя из размеров сечения.

$$\begin{aligned}
 \text{I. } A_1 &= 25 \times 30 = 750 \text{ см}^2, & y_1 &= 70 \text{ см;} \\
 \text{II. } A_2 &= 55 \times 10 = 550 \text{ см}^2, & y_2 &= 50 \text{ см;} \\
 \text{III. } A_3 &= 25 \times 45 = 1125 \text{ см}^2, & y_3 &= 22,5 \text{ см;} \\
 \text{IV. } A_4 &= A'_4 = 15 \times 45/2 = 337,5 \text{ см}^2, & y_4 &= y'_4 = 30 \text{ см.}
 \end{aligned}$$

Находим статический момент площади сечения

$$S_x = A_1 y_1 + A_2 y_2 + A_3 y_3 + 2A_4 y_4 = 750 \times 70 + 550 \times 50 + 1125 \times 22,5 + 2 \times 337,5 \times 30 = 125562,5 \text{ см}^3.$$

Площадь сечения  $A = A_1 + A_2 + A_3 + 2A_4 = 750 + 550 + 1125 + 337,5 \times 2 = 3100 \text{ см}^2$ .

Находим ординату центра тяжести  $y_c = S_x / A = 125562,5 / 3100 = 40,5 \text{ см}$ .

Итак, точка  $C$  имеет координаты  $0; 40,5$ .

По найденной ординате наносим на рисунок сечения точку  $C$  – центр тяжести. Разбивку рассмотренной фигуры по элементам можно было произвести иначе, как и положение оси  $x$  могло быть другим.

**Пример 2.** Требуется определить положение центра тяжести сечения, составленного из прокатных профилей (рис. 2):

Простые элементы подобных сечений – стандартные профили прокатной стали: швеллер, двутавр, полоса, равнобокие и неравнобокие уголки. Все необходимые размеры и характеристики профилей приведены в таблицах ГОСТа (Приложение I), называемых сортаментом прокатных профилей. Порядок решения тот же, что в предыдущей задаче.

Разбиваем сечение на шесть составных частей и обозначаем их центры тяжести. Положение центра тяжести прокатного профиля принять по сортаменту:

- I – двутавр № 20 с центром тяжести  $C_1$ ;
- II – швеллер № 20 с центром тяжести  $C_2$ ;
- III – два неравнобоких уголка № 8/5 с общим центром тяжести  $C_3$ ;
- IV – две полосы 12X200 мм с общим центром тяжести  $C_4$ .

Положение координатных осей принимаем следующим образом; ось  $x$  совмещаем с осью симметрии сечения, следовательно,  $y_c = 0$ ; ось  $y$  проводим перпендикулярно оси  $x$  по наружной грани стенки швеллера. Необходимо определить лишь координату центра тяжести  $x_c$  по формуле  $x_c = S_y / A$ , где  $S_y$  – статический момент относительно оси  $y$  определяется аналогично  $S_x$  предыдущей задаче, с той лишь разницей, что в этом случае участвуют абсциссы  $x_1, x_2, x_3, x_4$  центров тяжести прокатных профилей.

Выписываем из соответствующих таблиц сортамента площади профилей и, используя размеры, находим абсциссы их центров тяжести:

$$\text{Полная площадь сечения } A = A_1 + A_2 + A_3 + A_4 = 26,8 + 23,4 + 15,2 + 48 = 113,3 \text{ см}^2.$$

Находим статический момент сечения

$$S_y = A_1 x_1 + A_2 x_2 + A_3 x_3 + A_4 x_4 = 26,8 \times 20 + 23,4 \times 2,07 + 15,1 \times (-2,65) + 48 \times 10 = 1024,42 \text{ см}^3.$$

Определяем координату центра тяжести

$$\text{I. } A_1 = 26,8 \text{ см}^2,$$

$$x_1 = l_{\text{полосы}} = 20 \text{ см};$$

$$\text{II. } A_2 = 23,4 \text{ см}^2,$$

$$x_2 = z_0 = 2,07 \text{ см (см. приложение 2);}$$

$$\text{III. } A_3 = 2 \times 7,55 \text{ см}^2,$$

$$x_3 = y_0^* = -2,65 \text{ см}^* \text{ (см. приложение 4);}$$

$$\text{IV. } A_4 = A'_4 = 2 \times (1,2 \times 20) = 48 \text{ см}^2, \quad x_4 = l_{\text{полосы}}/2 = 10 \text{ см.}$$

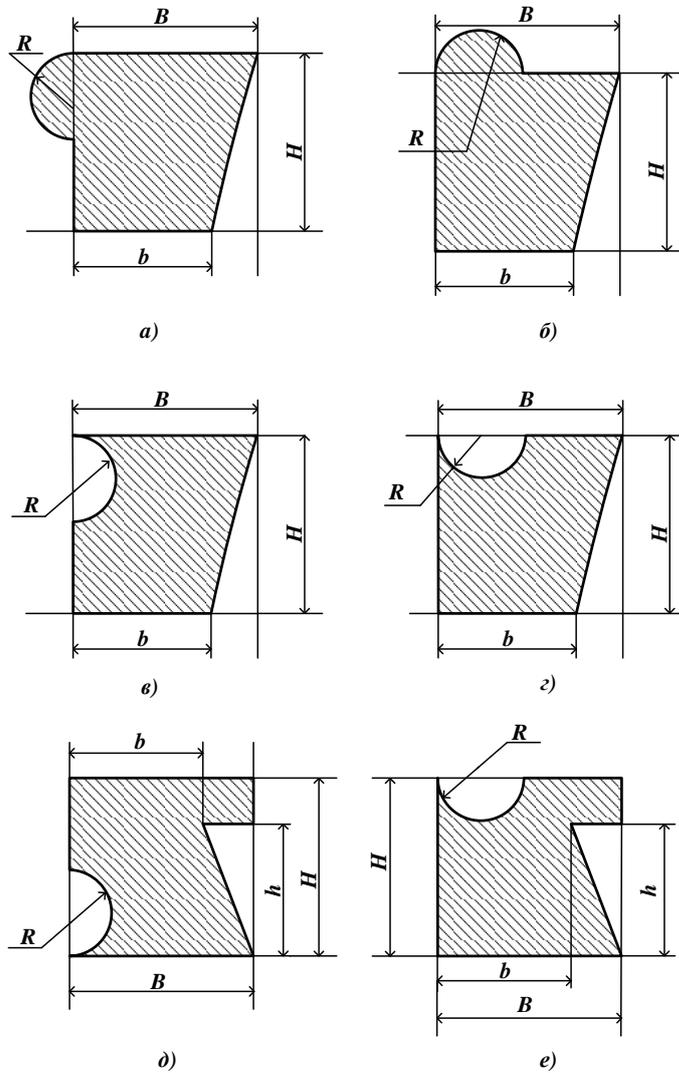
$$x_c = S_y/A = 1024,42 \text{ см}^3/113,3 \text{ см}^2 = 9,04 \text{ см.}$$

Итак, точка *C* имеет координаты 9,04; 0. Наносим найденный центр тяжести на рисунок сечения.

**Задание для самостоятельной работы.**

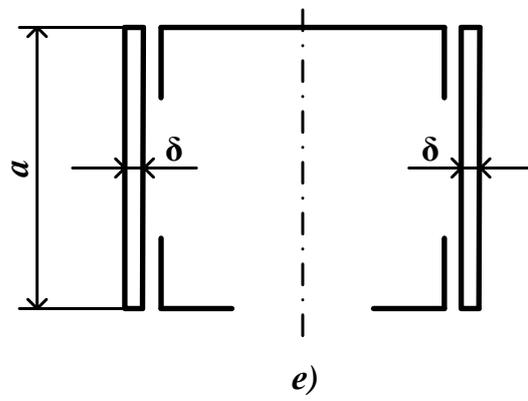
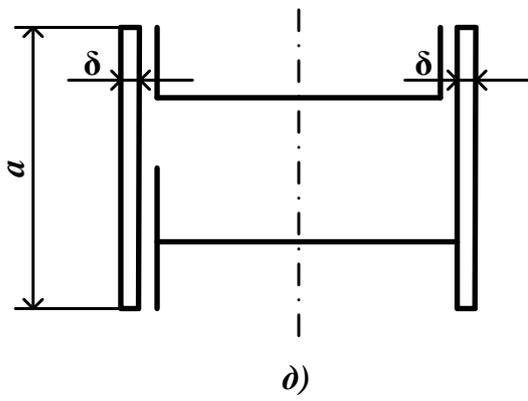
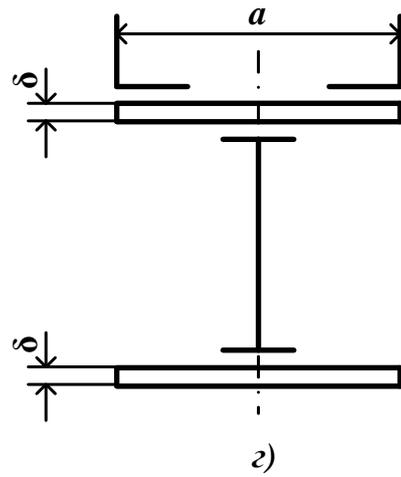
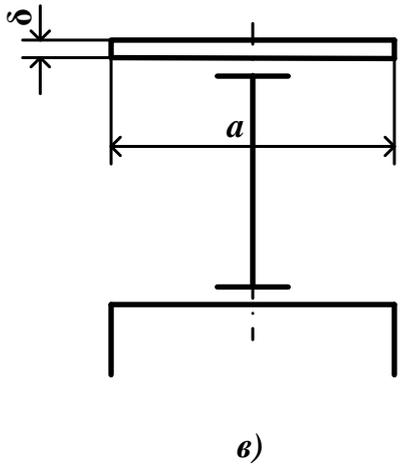
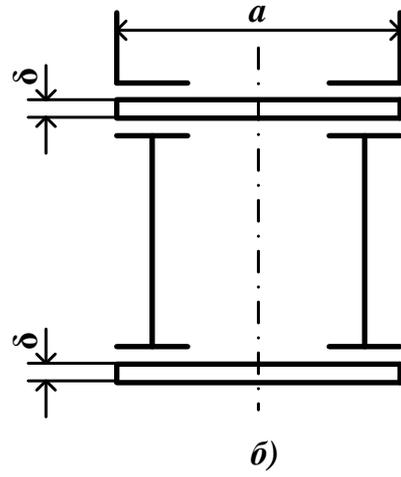
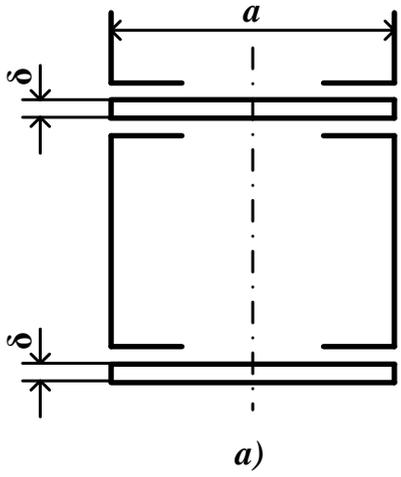
**Задание 1.** Определить координаты центра тяжести заданного сечения

Параметр	Вариант									
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
	Схема									
	а	б	в	г	д	е	а	б	в	г
<b>В, мм</b>	100	110	120	130	140	150	160	170	180	190
<b>в, мм</b>	60	70	80	90	100	110	120	130	140	150
<b>Н, мм</b>	80	90	100	110	120	130	140	150	160	170
<b>h, мм</b>	50	60	70	80	90	100	110	120	130	140
<b>Р, мм</b>	20	25	25	30	30	40	40	50	50	60



**Задание 2.** Определить координаты центра тяжести составного сечения. Сечения состоят из листов с поперечными размерами а·δ и прокатных профилей по ГОСТ 8239-89, ГОСТ 8240-89 и ГОСТ 8509-86. Уголки выбираются наименьшей толщины.

Параметр	Вариант									
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
	Схема									
	а	б	в	г	д	е	а	б	в	г
№ швеллера	18	18 <sub>а</sub>	20	20 <sub>а</sub>	22	22 <sub>а</sub>	24	24 <sub>а</sub>	27	30
№ двутавра	18	18 <sub>а</sub>	20	20 <sub>а</sub>	22	22 <sub>а</sub>	24	24 <sub>а</sub>	27	30
№ уголка	8	8	9	9	10	10	11	11	12,5	14
а, мм	180	200	200	220	220	240	240	260	270	300
δ, мм	5	5	5	5	5	5	6	6	6	6



## Практическое занятие № 5 «Общие теоремы динамики».

Знать зависимости для определения мощности при поступательном и вращательном движениях.  
КПД.

Знать основные уравнения динамики при поступательном и вращательном движениях твердого тела.

Уметь рассчитывать мощность с учетом потерь на трении и сил инерции.

Уметь определять параметры движения с помощью теорем динамики.

### Расчетные формулы

Мощность при поступательном движении

$$P = F v \cos \alpha,$$

где  $F$  — постоянная сила, Н;  $v$  — скорость движения, м/с;  $\alpha$  — угол между направлениями силы и перемещения.

Мощность при вращении

$$P = M\omega,$$

где  $M$  — вращающий момент, Нм;  $\omega$  — угловая скорость, рад/с.

Коэффициент полезного действия

$$КПД = \frac{P_{\text{пол}}}{P_{\text{затр}}},$$

где  $P_{\text{пол}}$  — полезная мощность, Вт;  $P_{\text{затр}}$  — затраченная мощность, Вт

Сила инерции

$$F_{\text{ин}} = -m a,$$

где  $a$  — ускорение точки, м/с<sup>2</sup>;  $m$  — масса, кг.

### Основные уравнения динамики

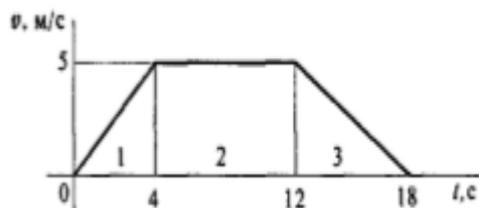
Поступательное движение твердого тела:  $F = ma$ .

Вращательное движение твердого тела:  $M_z = J e$ , где

$M_z$  — суммарный момент внешних сил относительно оси вращения, Нм;

$J$  — момент инерции относительно оси вращения, кг м<sup>2</sup>

$e$  — угловое ускорение, рад/с<sup>2</sup>.



Пример 1. График изменения скорости лифта при подъеме известен (рис. 5). Масса лифта с грузом 2800 кг. Определить натяжение каната, на котором подвешен лифт на всех участках подъема.

Решение

1. Рассмотрим участок 1 — подъем с ускорением.

Составим схему сил (рис. 5.1).

Рис.5

Уравнение равновесия кабины лифта:

$$\sum_0^n F_{ky} = 0; \quad T_1 - G - F_{\text{ин}1} = 0; \quad T_1 = G + F_{\text{ин}1} = mg + ma_1$$

где  $T$  — натяжение каната;  $G$  — сила тяжести;  
 $F_{ин}$  — сила инерции растягивающая канат.

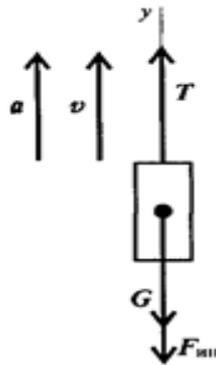


Рис.5.1

Для определения ускорения на участке  
 равнопеременное, скорость

$$v = v_0 + at; v_0 = 0.$$

Следовательно, ускорение:

$$a_1 = \frac{v_1}{t_1} = \frac{5}{4}; a_1 = 1,25 \text{ м/с}^2.$$

1 учтем, что движение на этом участке

Определяем усилие натяжения каната при подъеме с ускорением

$$T_1 = 2800(9,81 + 1,25) = 30\,968 \text{ Н};$$

$$T_1 = 30,97 \text{ кН}.$$

2. Рассмотрим участок 2 — равномерный подъем.

Ускорение и сила инерции равны нулю. Натяжение каната равно силе тяжести.

$$T_2 - G = 0; T_2 = G = mg;$$

$$T_2 = 2800 \cdot 9,81 \approx 28 \text{ кН}.$$

3. Участок 3 — подъем с замедлением. Ускорение направлено в сторону, обратную направлению подъема. Составим схему сил (рис. 5.2).

Уравнение равновесия:

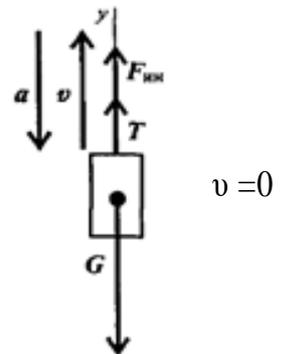
$$F_{ин} + T_3 - G = 0$$

Отсюда

$$T_3 = G - F_{ин3} = mg - ma_3$$

Ускорение (замедление) на этом участке определяется с учетом того, что

$$v_0 + a_3 t_3 = 0; a_3 = -\frac{v_0}{t_3}; a_3 = -\frac{5}{6} \text{ м/с}^2.$$



$v = 0$

Натяжение каната при замедлении до остановки:

$$T_3 = 2\,800 (9,81 - 5/6) = 25\,144 \text{ Н};$$

$$T_3 = 25,14 \text{ кН}.$$

Рис.5.2

Таким образом, натяжение каната меняется при каждом подъеме и опускании, канат выходит из строя в результате усталости материала.

Работоспособность зависит от времени.

**Пример 2.** После отключения двигателя колесо радиусом 0,5 м и массой 700 кг имело угловую частоту вращения 300 об/мин. Определите момент трения в подшипниках, если вал колеса остановился через 1,5 мин. Вращение принять равнопеременным, колесо считать сплошным цилиндром (рис. 17.9).

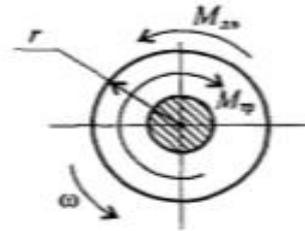


Рис. 17.9

**Решение**

1. Запишем уравнение динамики при вращении:

$$M_{\Sigma} = J\varepsilon = M_{\text{дв}} - M_{\text{тр}},$$

где  $M_{\Sigma}$  — суммарный момент внешних сил;  $J$  — момент инерции;  $\varepsilon$  — угловое ускорение;  $M_{\text{дв}}$  — движущий момент;  $M_{\text{тр}}$  — момент трения (сил сопротивления).

2. Определим угловое ускорение по формуле для угловой скорости при равнопеременном движении:

$$\omega = \omega_0 + \varepsilon t; \quad \omega_0 = \frac{\pi n}{30}; \quad \omega_0 = \frac{\pi \cdot 300}{30} = 31,4 \text{ рад/с}; \quad \omega = 0 \text{ (остановка)}.$$

Тогда

$$\varepsilon = -\frac{\omega_0}{t}; \quad \varepsilon = -\frac{31,4}{1,5 \cdot 60} = -0,35 \text{ рад/с}^2.$$

3. Определим момент инерции колеса, считая его сплошным цилиндром:

$$J = \frac{mr^2}{2} = \frac{700 \cdot 0,5^2}{2} = 87,5 \text{ кг} \cdot \text{м}^2.$$

4. Определяем величину тормозного момента — момента трения в подшипниках:  $M_{\text{дв}} = 0$ ;  $-M_{\text{тр}} = J\varepsilon$ ;  
 $-M_{\text{тр}} = 87,5(-0,35)$ ;  $M_{\text{тр}} = 30,625 \text{ Н} \cdot \text{м}$ .

**Пример 3.** Шкив приводится во вращение ременной передачей (рис. 17.10). Натяжение ведущей ветви ремня  $S_1 = 120 \text{ Н}$ , ведомого —  $S_2 = 50 \text{ Н}$ . Масса шкива 200 кг, диаметр 80 мм, момент сопротивления в подшипниках 1,2 Н·м. Определить угловое ускорение вала пренебрегая его массой. Шкив считать тонкостенным цилиндром.

**Решение**

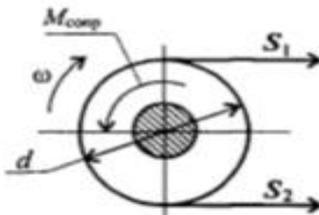


Рис. 17.10

1. Используем основное уравнение динамики  $M_{\Sigma} = J\varepsilon$ .

2. Определяем суммарный момент внешних сил

$$M_{\Sigma} = S_1 \frac{d}{2} - S_2 \frac{d}{2} - M_{\text{сопр}};$$

$$M_{\Sigma} = 120 \cdot \frac{0,08}{2} - 50 \cdot \frac{0,08}{2} - 1,2 = 1,6 \text{ Н} \cdot \text{м}.$$

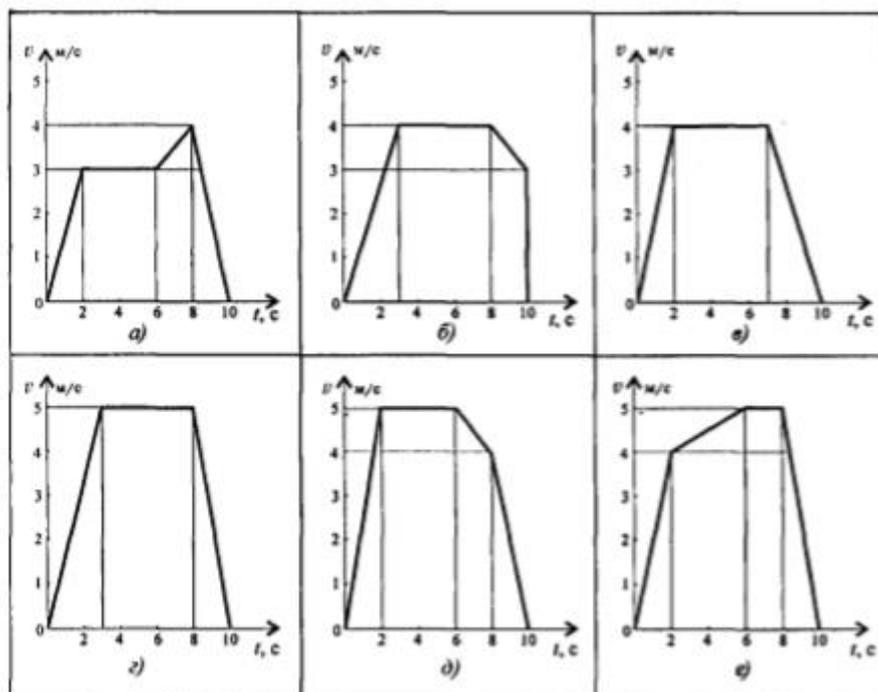
3. Рассчитываем момент инерции шкива, влиянием вала пренебрегаем:

$$J = mr^2; \quad J = 200 \left( \frac{0,08}{2} \right)^2 = 0,128 \text{ кг} \cdot \text{м}^2.$$

4. Определяем угловое ускорение шкива

$$\varepsilon = \frac{M_{\Sigma}}{J}; \quad \varepsilon = \frac{1,6}{0,128} = 12,5 \text{ рад/с}^2.$$

**Задание .** Скорость кабины лифта массой  $m$  изменяется согласно графикам. Определить величину натяжения каната, на котором подвешен лифт, при подъеме и опускании. По максимальной величине натяжения каната определить требуемую мощность электродвигателя.



Параметр	Вариант									
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Масса $m$ , кг	500	700	750	800	600	800	600	450	900	850
КПД механизма	0,8	0,75	0,8	0,75	0,8	0,75	0,8	0,75	0,8	0,75

Рекомендации по выполнению задания.

- Используя принцип Даламбера, определить натяжение канат кабины лифта на каждом участке движения
- Определить максимальное натяжение каната.
- По максимальному натяжению каната определить максимальную требуемую мощность для подъема груза.
- По заданной величине КПД механизма определить максимальную мощность двигателя.

## ПРАКТИЧЕСКАЯ РАБОТА №6

### Определение диаметра вала из условия прочности при кручении

**Цель:** Освоить определение величины крутящих моментов и построение их эпюр, а также расчет на прочность и жесткость вала.

**Время проведения занятия:** 2 часа.

#### 1. ОСНОВНЫЕ ПОЛОЖЕНИЯ ТЕОРИИ

##### 1.1. Внутренние силы при кручении

Деформация кручения имеет место при действии на брус уравновешенной системы пар сил,

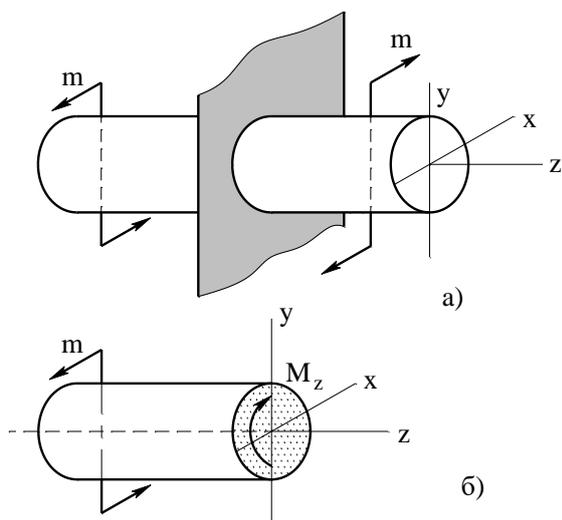


Рис. 1.

расположенных в плоскостях, перпендикулярных продольной оси бруса, рис. 1, а.

Брус, работающий на кручение, называют **валом**. В поперечных сечениях вала, действует только один внутренний силовой фактор – крутящий момент  $M_z$ , рис. 1, б.

Рассмотрим порядок определения величины крутящего момента  $M_z$ :

- Вал разбивают на участки, границами которых являются сечения, где приложены скручивающие моменты и сечения, где изменяется диаметр.

- В пределах каждого участка используют метод сечений: разрезают вал поперечным сечением; отбрасывают одну из частей вала (желательно ту, к которой приложено больше скручивающих моментов или моменты, величина которых неизвестна).

- Пользуясь соответствующими правилами, определяют величину крутящих моментов.

**I правило:** величина крутящего момента  $M_z$  в произвольном сечении вала численно равна алгебраической сумме внешних скручивающих моментов, приложенных к оставшейся части вала.

$$M_z = \sum m_z^{осм}$$

**II правило (правило знаков):** если внешний скручивающий момент представляется направленным по часовой стрелке при взгляде на поперечное сечение со стороны оставшейся части, то его следует взять со знаком «плюс», а если против часовой стрелки, то со знаком «минус» (рис. 2).

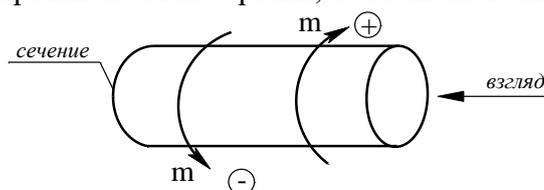


Рис. 2.

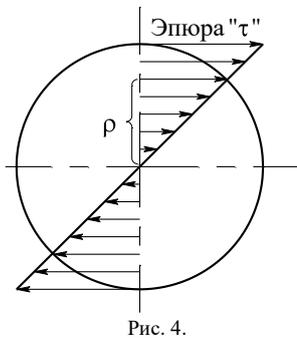


Рис. 4.

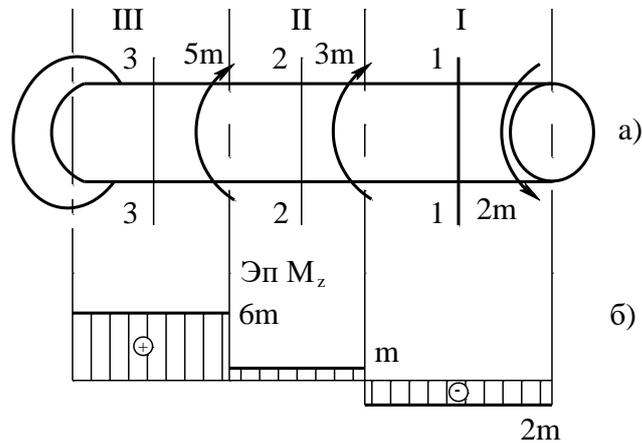


Рис. 3.

Порядок построения эпюры « $M_z$ ».

- Проводят ось эпюры непосредственно под расчетной схемой (рис. 3, б).
- В пределах каждого участка откладывают значения « $M_z$ » в выбранном масштабе: положительные – вверх, отрицательные – вниз (рис. 3, б).
- Через концы полученных отрезков проводят прямые, параллельные оси эпюры.
- Штрихуют эпюру линиями, перпендикулярными оси эпюры (вала), т.к. каждая линия штриховки имеет определенный физический смысл: в выбранном масштабе она соответствует значению крутящего момента в данном сечении (рис. 3, б).

Указывают на эпюру значения « $M_z$ » в пределах каждого участка.

На большем поле эпюры крутящих моментов один раз сверху от оси указывают знак «плюс», снизу – знак «минус».

Над эпюрой выполняют надпись: *Эп. « $M_z$ » (кН·м).*

Рассмотрим вышеизложенное на примере.

Определим величину крутящих моментов в поперечных сечениях вала, представленного на рис. 3, а.

- Разбиваем вал на три участка.
- Определяем крутящие моменты в поперечных сечениях участков вала:

$$M_{1z} = -2m; \quad M_{2z} = -2m + 3m = m; \\ M_{3z} = -2m + 3m + 5m = 6m.$$

- В данном примере мы отбрасываем во всех случаях левую часть вала, т. к. к ней приложен неизвестный реактивный момент (реакция заделки) (рис. 3, а).

Правила контроля правильности построения эпюры « $M_z$ ».

1. В пределах каждого участка эпюра « $M_z$ ». изображается прямой, параллельной оси эпюры.
2. В сечениях вала, в которых приложены внешние скручивающие моменты на эпюре, имеются скачки, величина которых соответствует величине приложенного скручивающего момента.

Например: в сечении, где приложен момент  $3m$ , величина скачка равна  $3m$  ( $2m + m$ ).

## 1.2. Напряжения в поперечных сечениях вала

Крутящему моменту соответствуют касательные напряжения  $\tau$ , которые распределяются по линейному закону вдоль диаметра, рис. 4. Величина касательных напряжений в любой точке поперечного сечения может быть определена по формуле:

$$\tau = \frac{M_z}{I_\rho} \cdot \rho, \quad (1)$$

где  $M_z$  – крутящий момент;

$I_\rho$  – полярный момент инерции.

Для круглого сечения полярный момент инерции равен:

$$I_\rho = \frac{\pi \cdot d^4}{32} \approx 0,1d^4, \quad (2)$$

где  $d$  – диаметр круглого сечения;

$\rho$  – расстояние от центра круга (полюса) до точки, в которой определяется напряжение.

Для кольцевого сечения (рис. 6):

$$I_{\rho} = \frac{\pi \cdot D^4}{32} (1 - c^4) \approx 0,1D^4(1 - c^4) . \quad (3)$$

Из формулы (1) следует, что касательное напряжение в центре сечения равно нулю, а максимальные по величине напряжения действуют в точках контура сечения (так называемые «опасные точки»), т. е. при  $\rho = \frac{d}{2}$ . Величина этих напряжений может быть определена по формуле:

$$\tau_{max} = \frac{M_z}{W_{\rho}} , \quad (4)$$

где  $W_{\rho}$  – полярный момент сопротивления.

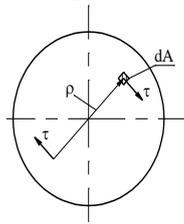


Рис. 5.

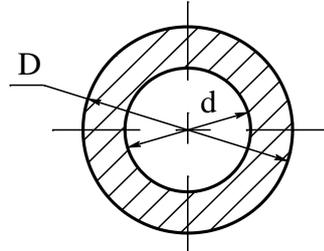


Рис. 6.

Для круглого сечения:

$$W_{\rho} = \frac{\pi \cdot d^3}{16} \approx 0,2 \cdot d^3 . \quad (5)$$

Для кольцевого сечения:

$$W_{\rho} = \frac{\pi \cdot D^3}{16} (1 - c^4) \approx 0,2 \cdot D^3 (1 - c^4) , \quad (6)$$

где  $D$  – внешний диаметр кольца;  $c$  – отношение диаметров:  $c = \frac{d}{D}$ .

Направление касательного напряжения в каждой точке сечения перпендикулярно радиусу (рис. 5).

Выражение крутящего момента через напряжения:

$$M_z = \int_A \rho \cdot \tau \cdot dA , \quad (7)$$

отражает его физический смысл: крутящий момент – есть момент результирующий пары внутренних касательных сил упругости, действующих в поперечном сечении вала.

### 1.3. Расчет на прочность

Прочность бруса, работающего на кручение, считается обеспеченной, если наибольшие касательные напряжения, возникающие в его опасном сечении, не превышают величины допускаемого напряжения.

Для вала постоянного диаметра опасным является участок, в котором действует наибольший крутящий момент. Для вала, представленного на рис. 3, опасным является третий участок.

Для ступенчатого вала, опасным считают участок вала, в поперечных сечениях которого действуют наибольшие по величине касательные напряжения.

Условие прочности при кручении имеет вид:

$$\tau_{max} = \frac{M_z}{W_{\rho}} \leq [\tau] , \quad (8)$$

где  $\tau_{max}$  – максимальное напряжение в опасном сечении вала;

$M_z$  – крутящий момент;

$W_{\rho}$  – полярный момент сопротивления поперечного сечения вала;

$[\tau]$  – допускаемое касательное напряжение; для пластичных материалов принимают равным  $[\tau] \approx (0,55 \div 0,60) [\sigma]$ .

Различают три вида расчетов на прочность: проверочный, проектный и определение допускаемой нагрузки.

#### 1.3.1. Проверочный расчет

Осуществляется по условию (8). Расчет производится с целью оценки прочности вала под действием заданной нагрузки.

#### Порядок расчета

- Разбивают вал на участки.
- Определяют величину крутящих моментов в поперечных сечениях участков вала и строят их эпюру.
- Определяют полярные моменты сопротивления поперечных сечений вала по формулам (5) или (6) в зависимости от формы сечения.
- Определяют максимальные касательные напряжения в поперечных сечениях на каждом участке по формуле (4) и строят их эпюру.
- Делают вывод о прочности, согласно условию (8), то есть сравнивают величину наибольшего касательного напряжения  $\tau_{max}$  с величиной допускаемого напряжения  $[\tau]$ . Прочность вала обеспечивается, если максимальное касательное напряжение, возникающее в опасном сечении вала, не превышает величины допускаемого напряжения. Допускается перенапряжение в пределах 5%.

### 1.3.2. Проектный расчет

Осуществляется по условию:

$$W_p = \frac{M_z}{[\tau]}, \quad (9)$$

где  $M_z = /M_z/_{max}$ , значение его берем из эпюры « $M_z$ »;  
 $[\tau]$  – допускаемое напряжение;  
 $W_p$  – полярный момент сопротивления.

#### Порядок расчета

- Разбивают вал на участки.
- Определяют величину крутящих моментов в поперечных сечениях участков вала и строят их эпюру.
- Выясняют опасные участки вала, это участки, в поперечных сечениях которых действуют наибольшие по абсолютной величине крутящие моменты.
- Определяют требуемые моменты сопротивления поперечных сечений вала по формуле (9).
- Определяют диаметры поперечных сечений вала.

Для круглого сечения по формуле:

$$d = \sqrt[3]{\frac{W_p}{0,2}}. \quad (10)$$

Для кольцевого сечения:

$$D = \sqrt[3]{\frac{W_p}{0,2(1 - c^4)}}, \quad (11)$$

где  $D$  – наружный диаметр кольца;

$$c = \frac{d}{D};$$

$d$  – внутренний диаметр кольца.

Полученное значение диаметра следует округлить до ближайшего большего четного числа или числа, оканчивающегося на 5.

### 1.3.3. Определение допускаемой нагрузки

Известна расчетная схема вала, его поперечные размеры, допускаемое напряжение.

Требуется определить величину допускаемой нагрузки.

#### Порядок расчета

- Разбивают вал на участки.
- Записывают выражения для крутящих моментов на участках вала.
- Строят эпюру крутящих моментов.
- Определяют полярные моменты сопротивления поперечных сечений вала.
- Определяют наибольшие крутящие моменты на участках вала по формуле:

$$M_z = W_p [\tau]. \quad (12)$$

- Определяют величину допускаемой нагрузки.

## 1.4. Деформации при кручении

Характеристикой деформации при кручении является угол закручивания  $\varphi$  (рис. 7) - это угол, на который поперечное сечение поворачивается по отношению к своему первоначальному положению. В пределах упругих деформаций угол закручивания связан с крутящим моментом линейной зависимостью:

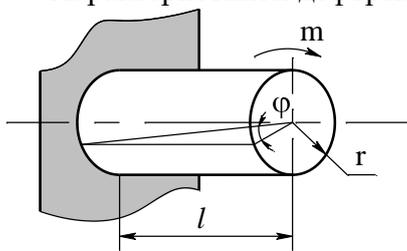


Рис. 7.

$$\varphi = \frac{M_z \cdot l}{I_\rho \cdot G}, \quad (13)$$

где  $M_z$  – крутящий момент;

$l$  – длина участка вала (расстояние между сечениями,

относительный (взаимный) угол поворота которых определяется);

$I_\rho$  – полярный момент инерции;

$G$  – модуль сдвига.

Для определения угла поворота  $\alpha$ , заданного сечения вала необходимо определить углы закручивания  $\varphi$  участков вала, расположенных между зашпеленным и рассматриваемым сечением и найти их алгебраическую сумму. Например угол поворота сечения  $A-A$  вала, представленного на рис. 9, равен:

$$\alpha_{A-A} = \varphi_3 + \varphi_4.$$

Мерой жесткости при кручении является относительный угол закручивания  $\theta$  (угол закручивания на единицу длины вала).

Следует отметить, что в отличие от допускаемого напряжения, зависящего в первую очередь от материала вала, допускаемый угол закручивания зависит от назначения вала.

Значения допускаемых углов закручивания, встречающихся в различных отраслях машиностроения, весьма разнообразны; наиболее распространены значения  $[\theta_0] = (4,38 \dots 17,5) \cdot 10^{-3} \text{ рад/м} = 0,25 \dots 1,0 \text{ град/м}$ .

Условие жесткости при кручении имеет вид:

$$\theta = \frac{M_z}{GJ_\rho} \leq [\theta_0]. \quad (14)$$

При проектном расчете отсюда определяют требуемое значение  $I_\rho$ , а затем из формул (2) и (3) вычисляют диаметр вала. Из двух значений диаметров вала, определенных из расчетов на прочность и жесткость, в качестве окончательного (исполнительного размера) должен быть, принят больший.

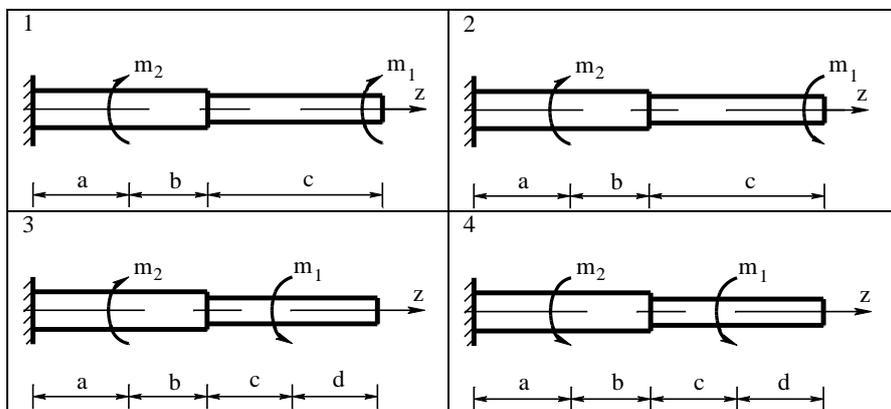
## 2. ИНДИВИДУАЛЬНЫЕ ЗАДАНИЯ И ПРИМЕРЫ РАСЧЕТА ВАЛА НА ПРОЧНОСТЬ И ЖЕСТКОСТЬ

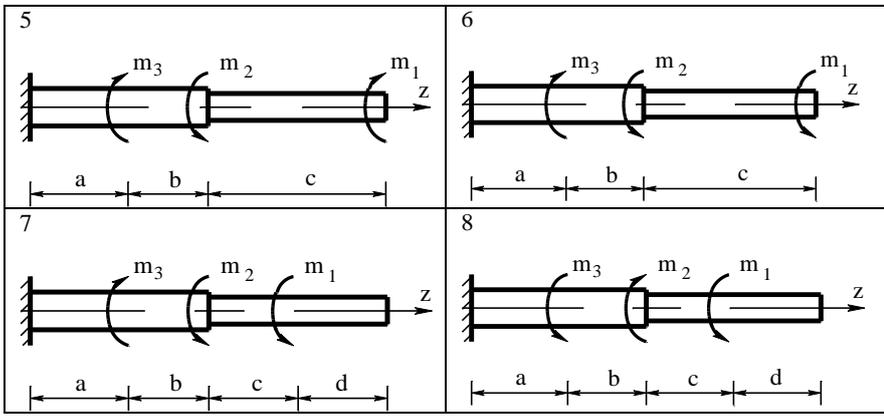
Для заданной расчетной схемы вала (табл. 1) требуется:

1. Построить эпюру крутящих моментов.
2. Определить поперечные размеры вала.
3. Проверить жесткость вала.

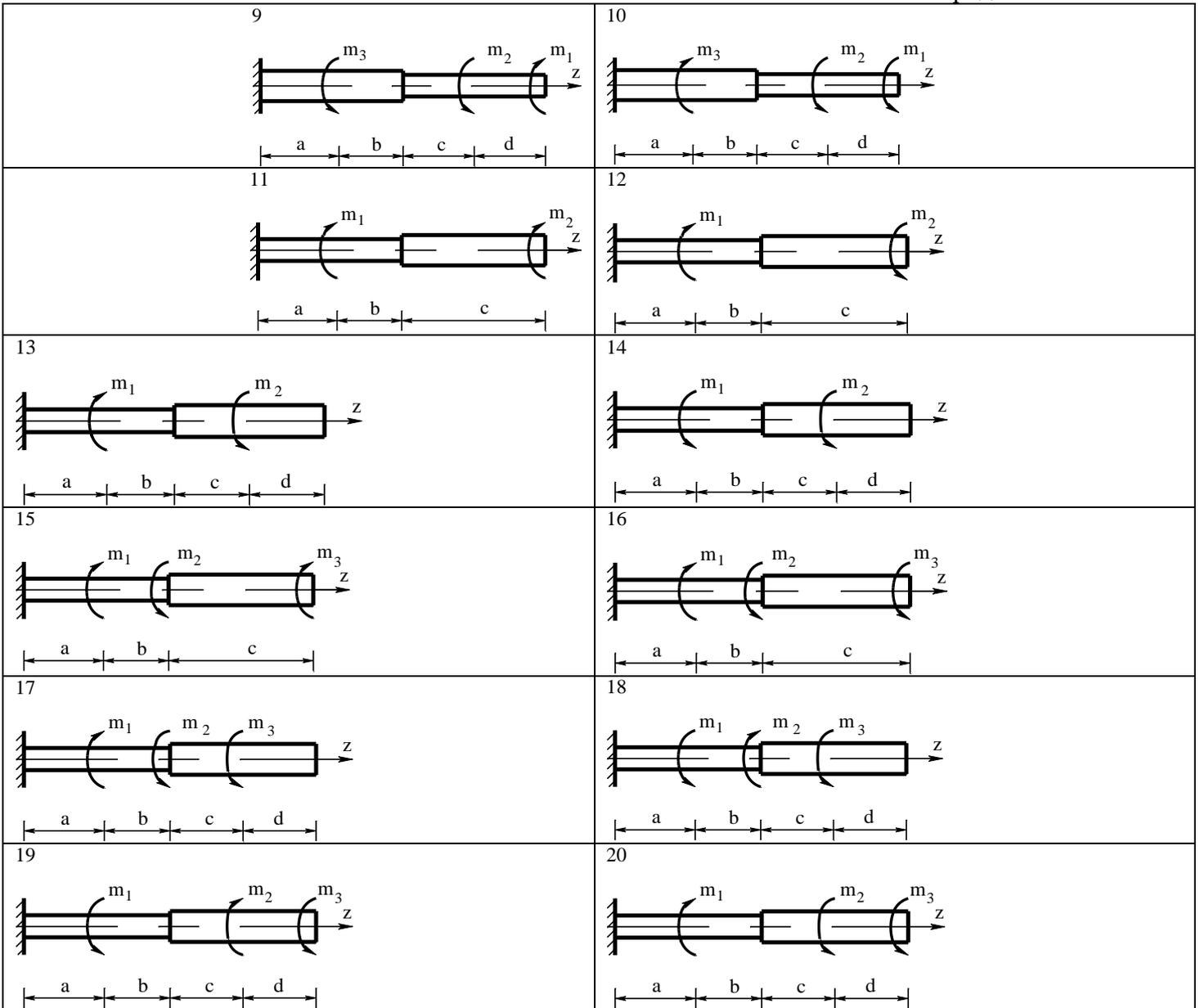
Исходные данные взять из табл. 2.

Таблица 1

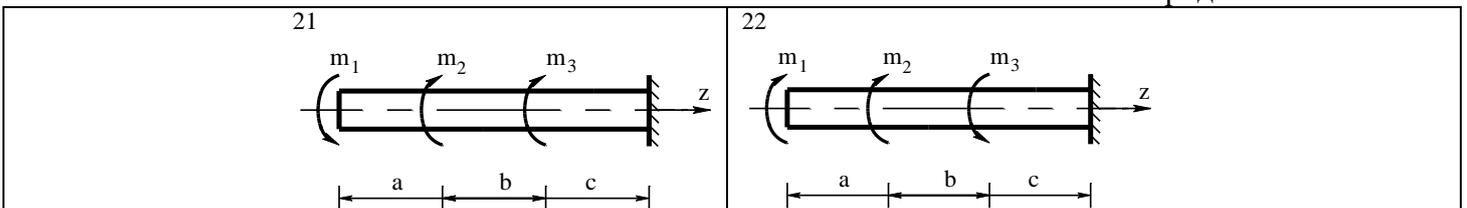




Продолжение табл. 1



Продолжение табл. 1



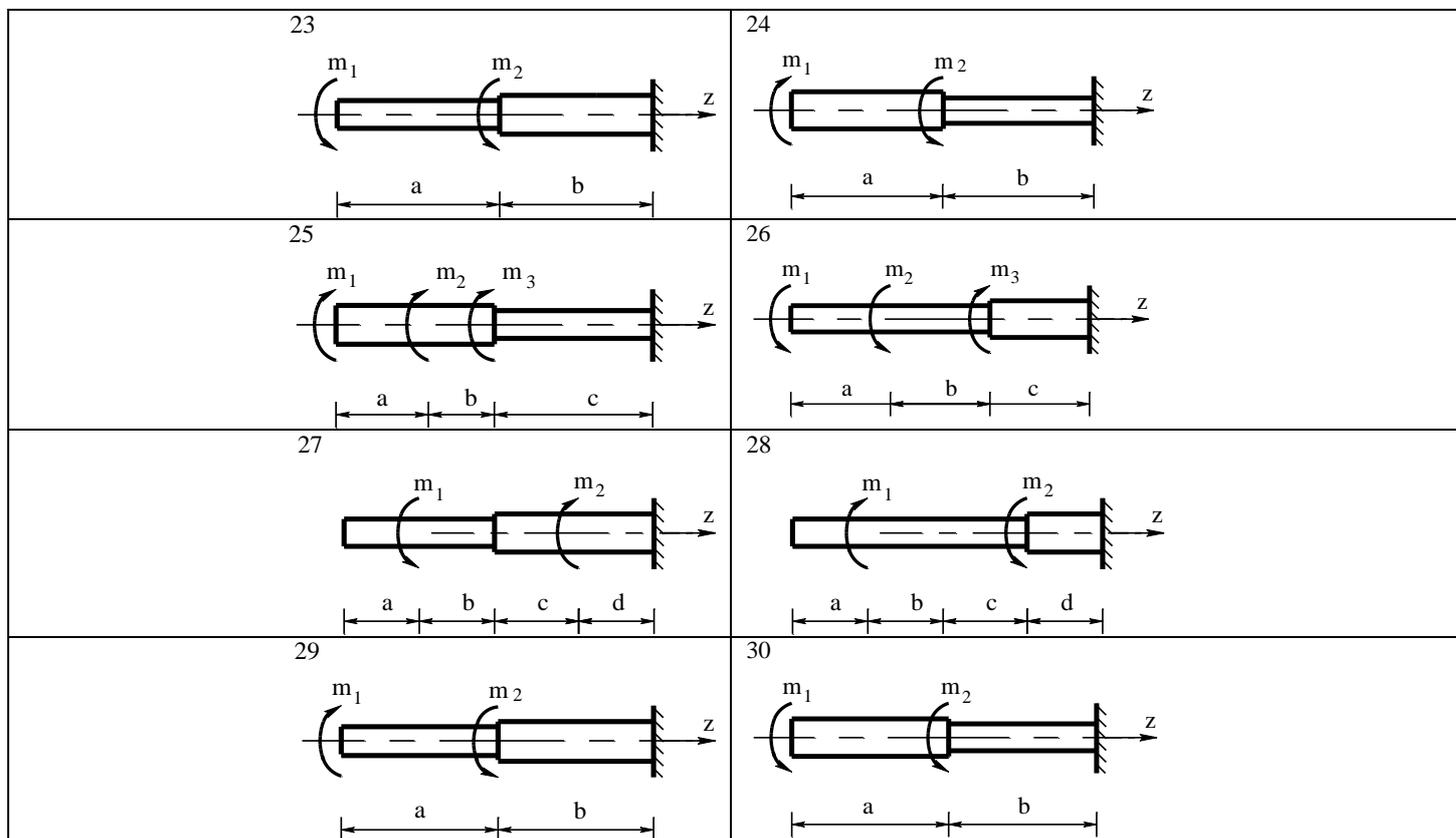


Таблица 2

Вариант №	m <sub>1</sub>	m <sub>2</sub>	m <sub>3</sub>	a	в	с	[τ]
							МПа
	кН · м			м			
1	0,1	0,4	0,2	0,2	0,3	0,4	35
2	0,2	0,3	0,2	0,1	0,2	0,3	40
3	0,3	0,2	0,3	0,3	0,4	0,5	50
4	0,4	0,3	0,1	0,2	0,3	0,3	50
5	0,2	0,4	0,2	0,2	0,3	0,2	60

Продолжение табл. 2

Вариант №	m <sub>1</sub>	m <sub>2</sub>	m <sub>3</sub>	a	в	с	[τ]
6	0,3	0,2	0,6	0,3	0,4	0,3	80
7	0,2	0,2	0,3	0,4	0,5	0,4	70
8	0,3	0,1	0,5	0,3	0,4	0,3	60
9	0,1	0,5	0,3	0,2	0,1	0,3	40
10	0,2	0,8	0,4	0,3	0,2	0,3	50

Примечание: модуль сдвига  $G = 8 \cdot 10^4$  МПа.

### Пример № 1

Таблица 3

Исходные данные

m <sub>1</sub>	m <sub>2</sub>	m <sub>3</sub>	a	в	с	d	[τ]	G
кН · м			м				[τ]	МПа
1	0,4	0,5	0,5	0,3	0,2	0,1	60	$8 \cdot 10^4$

Для заданной расчетной схемы вала требуется (рис. 8) построить: эпюру крутящих моментов, определить поперечные размеры вала; проверить жесткость вала. Исходные данные взять из табл. 3.

### Решение

1. Разбиваем вал на четыре участка. Границами участков являются сечения, в которых действуют внешние моменты и сечения, где изменяется диаметр вала.

2. Определяем крутящие моменты в поперечных сечениях каждого участка вала и строим их эпюру.

$$\begin{aligned} M_{z1} &= m_3 = 0,5 (\text{кН}\cdot\text{м}); \\ M_{z2} &= m_3 - m_1 = 0,5 - 1 = -0,5; \\ M_{z3} &= m_3 - m_1 = 0,5 - 1 = -0,5; \\ M_{z4} &= m_3 - m_1 - m_2 = 0,5 - 1 - 0,4 = -0,9 (\text{кН}\cdot\text{м}). \end{aligned}$$

Опасными участками вала являются I и IV участки:

3. Определяем требуемые полярные моменты сопротивления обеих ступеней вала:

$$W_{\rho} = \frac{\max |M_z|}{[\tau]}.$$

$$W_{\rho 1,2} = \frac{0,5 \cdot 10^6}{60} = 8,33 \cdot 10^3 \text{ мм}^3,$$

$$W_{\rho 3,4} = \frac{0,9 \cdot 10^6}{60} = 15 \cdot 10^3 \text{ мм}^3.$$

4. Определяем требуемые поперечные размеры вала:

$$d = \sqrt[3]{\frac{W_{\rho}}{0,2}},$$

$$d_{1,2} = \sqrt[3]{\frac{8,33}{0,2} \cdot 10^3} = 10 \cdot \sqrt[3]{41,66} = 34,6 \approx 35 \text{ мм},$$

$$d_{3,4} = \sqrt[3]{\frac{15 \cdot 10^3}{0,2}} = 10 \cdot \sqrt[3]{75} = 42 \text{ мм}.$$

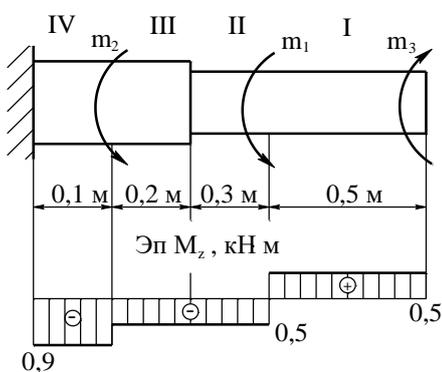


Рис. 8.

5. Определяем полярные моменты инерции поперечных сечений вала:

$$I_{\rho} = \frac{\pi d^4}{32} \approx 0,1 d^4,$$

$$I_{\rho 1,2} = 0,1 \cdot 35^4 = 150 \cdot 10^3 \text{ мм}^4,$$

$$I_{\rho 3,4} = 0,1 \cdot 42^4 = 311 \cdot 10^3 \text{ мм}^4.$$

6. Проверяем жесткость вала:

6.1. Определяем наибольший относительный угол закручивания:

$$\theta = \frac{|M_z|}{G \cdot I_{\rho}},$$

$$\theta_1^{\circ} = \frac{0,5 \cdot 10^6 \cdot 10^3 \cdot 180^{\circ}}{8 \cdot 10^4 \cdot 150 \cdot 10^3 \cdot 3,14} = \frac{5 \cdot 180^{\circ}}{8 \cdot 15 \cdot 3,14} = 2,4^{\circ},$$

$$\theta_2^{\circ} = \frac{0,9 \cdot 10^6 \cdot 10^3 \cdot 180^{\circ}}{8 \cdot 10^4 \cdot 311 \cdot 10^3 \cdot 3,14} = \frac{90 \cdot 180^{\circ}}{8 \cdot 311 \cdot 3,14} = 2,1^{\circ}.$$

6.2. Делаем вывод о жесткости:

$$\theta_{\max} = \theta_1 = 2,4^{\circ} > 1,5^{\circ}.$$

Жесткость вала недостаточна.

### Пример № 2.

Для заданной расчетной схемы вала требуется (рис. 9): построить эпюры крутящих моментов и касательных напряжений; проверить прочность вала. Определить угол поворота сечения вала, в котором изменяется его диаметр. Исходные данные взять из табл.4.

Таблица 4

Исходные данные

$m_1$	$m_2$	$m_3$	a	b	c	$[\tau]$	G	$d_1$	$D_2$
-------	-------	-------	---	---	---	----------	---	-------	-------

кН · м			м			МПа		см	
0,3	0,4	0,2	0,3	0,2	0,4	60	$8 \cdot 10^4$	4	5

### Решение

1. Разбиваем вал на четыре участка.

2. Определяем величины крутящих моментов в поперечных сечениях каждого участка вала:

$$M_z = \sum M_z^{ocm}; M_{z1} = -m_3 = -0,2;$$

$$M_{z2} = -m_3 - m_2 = -0,2 - 0,4 = -0,6;$$

$$M_{z3} = -m_3 - m_2 = -0,2 - 0,4 = -0,6 \text{ (кН·м)};$$

$$M_{z4} = -m_3 - m_2 + m_1 = -0,2 - 0,4 + 0,3 = -0,3.$$

3. Определяем полярные моменты сопротивления поперечных сечений вала:

$$W_\rho = \frac{\pi d^3}{16} \approx 0,2d^3,$$

для участков 1 и 2:

$$W_\rho = 0,2 \cdot 5^3 = 2,5 \text{ см}^3,$$

для участков 3 и 4:

$$W_\rho = 0,2 \cdot 4^3 = 12,8 \text{ см}^3.$$

4. Определяем максимальные касательные напряжения в поперечных сечениях вала и строим их эпюру:

$$\tau = \frac{M_z}{W_\rho},$$

где  $M_z$  – крутящий момент; его значение берем из эпюры « $M_z$ »:

$$\tau_1 = -\frac{0,2 \cdot 10^6}{25 \cdot 10^3} = -8 \text{ МПа},$$

$$\tau_2 = -\frac{0,6 \cdot 10^6}{25 \cdot 10^3} = -24 \text{ МПа},$$

$$\tau_3 = -\frac{0,6 \cdot 10^6}{12,8 \cdot 10^3} = -46,9 \text{ МПа},$$

$$\tau_4 = -\frac{0,3 \cdot 10^6}{12,8 \cdot 10^3} = -23,4 \text{ МПа}.$$

Опасным является третий участок вала.

5. Вывод о прочности вала: так как  $\tau_{max} = 46,9 \text{ МПа} < [\tau] = 55 \text{ МПа}$ , то прочность вала обеспечивается.

6. Определяем полярные моменты инерции поперечных сечений 3-го и 4-го участков вала:

$$I_\rho = \frac{\pi d^4}{32} \approx 0,1d^4,$$

$$I_\rho = 0,1 \cdot 4^4 = 25,6 \text{ см}^4.$$

7. Определяем углы закручивания III и IV участков вала:

$$\varphi = \frac{M_z \cdot \ell}{G \cdot I_\rho},$$

где  $M_z$  – крутящий момент;

$\ell$  – длина участка;

$G$  – модуль сдвига:

$$\varphi_3 = \frac{-0,6 \cdot 10^6 \cdot 0,2 \cdot 10^3}{8 \cdot 10^4 \cdot 25,6 \cdot 10^4} = \frac{-0,6 \cdot 0,2 \cdot 10}{8 \cdot 25,6} = -5,85 \cdot 10^{-3} \text{ рад},$$

$$\varphi_4 = \frac{-0,3 \cdot 10^6 \cdot 0,3 \cdot 10^3}{8 \cdot 10^4 \cdot 25,6 \cdot 10^4} = -4,39 \cdot 10^{-3} \text{ рад}.$$

8. Определяем угол поворота сечения А-А:

$$\alpha_{A-A} = \varphi_3 + \varphi_4 = -(5,85 + 4,39) \cdot 10^{-3} \text{ рад} = -10,24 \cdot 10^{-3} \text{ рад}.$$

$$\alpha_{A-A}^\circ = -10,24 \cdot 10^{-3} \cdot 57^\circ = -0,58^\circ.$$

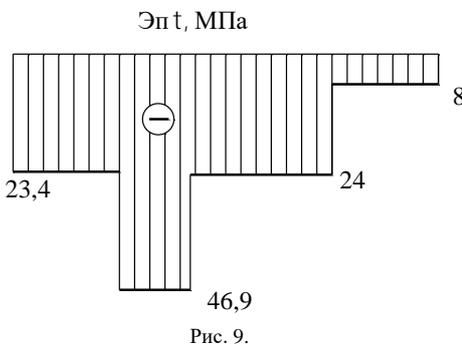
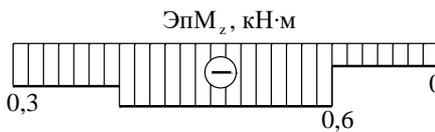
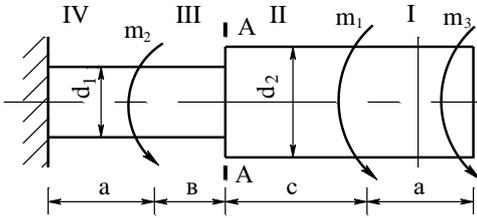


Рис. 9.

Сечение  $A-A$  повернется на угол  $0,58^\circ$  против часовой стрелки.

## 2. КОНТРОЛЬНЫЕ ВОПРОСЫ

1. Что такое брус? вал?
2. Влияет ли форма поперечного сечения бруса на его прочность и жесткость при кручении?
3. В каких случаях имеет место деформация кручения бруса?
4. Какой внутренний силовой фактор действует в поперечных сечениях вала?
5. Что такое эпюра крутящих моментов?
6. Что является границей участков вала? Приведите пример расчетной схемы вала и разбейте его на участки.
7. Какие пункты метода сечений необходимо использовать, прежде чем определять величину крутящих моментов?
8. Сформулируйте правило для определения величины крутящих моментов и правило знаков.
9. Приведите пример для определения величины крутящих моментов.
10. В какой последовательности строится эпюра крутящих моментов?
11. Каковы правила контроля эпюры « $M_z$ »?
12. Как выполняется штриховка эпюры « $M_z$ »? Поясните ответ.
13. Зависит ли величина крутящих моментов от размеров вала и формы его поперечного сечения?
14. Физический смысл крутящего момента.
15. Зависит ли величина касательного напряжения от длины вала в случае нагружения его сосредоточенными моментами? От формы сечения?  
От размеров сечения?
16. Какие напряжения действуют в поперечных сечениях вала?
17. В каких единицах измеряется величина напряжения в системе СИ?
18. Формула для определения величины касательного напряжения в любой точке поперечного сечения при кручении?
19. В каких точках поперечного сечения напряжения при кручении равны нулю? В каких точках они максимальны?
20. Как изменится величина наибольшего касательного напряжения, если диаметр вала увеличить вдвое?
21. Какие геометрические характеристики используются в формулах для определения напряжений? Как определяется их величина для круглого сечения, для кольцевого сечения?
22. Какое направление имеют касательные напряжения в точках поперечного сечения при кручении?
23. Условие прочности при кручении.
24. Три типа расчетов на прочность при кручении и порядок их выполнения.
25. В каких случаях прочность вала считается достаточной?
26. Что является характеристикой деформации при кручении. От чего зависит её величина?
27. Формула для определения угла закручивания?
28. При каких деформациях зависимость между крутящим моментом и углом закручивания линейная?
29. Какое свойство материала характеризует модуль сдвига?
30. Как изменится величина угла закручивания, если диаметр вала увеличить вдвое?
31. Что является мерой деформации при кручении?
32. Как определить угол поворота заданного сечения вала?
33. Как определяется величина относительного угла закручивания?
34. Условие жесткости при кручении.

## Практическая работа №7 Построение эпюр поперечных сил и изгибающих моментов.

Определение продольной силы  $N_i$  рекомендуется начинать со свободного конца стержня, так как значение реактивной силы в заделке неизвестно (либо предварительно определить значение реакции в заделке). Для определения продольной силы  $N_i$  на каждом участке используют метод сечений, руководствуясь правилом: продольная сила в любом сечении стержня равна алгебраической сумме проекций всех внешних сил, расположенных по одну сторону от сечения на ось стержня:

$$N_i = \sum_{\substack{\text{с одной} \\ \text{стороны} \\ \text{от сечения}}} F_i$$

Продольная сила считается положительной, если она соответствует деформации растяжения и отрицательной, если она соответствует деформации сжатия. Коэффициенты запаса прочности участков стержня для хрупких материалов определяются с учетом вида деформации на участках (растяжение или сжатие) по формуле:

$$n_i = \sigma_b / \sigma_i,$$

где  $\sigma_i$  – напряжение на  $i$ -м участке стержня;

$\sigma_b$  – предел прочности материала на сжатие или растяжение (соответственно  $\sigma_{всж}$  или  $\sigma_{вр}$ ).

Для оценки прочности стержня необходимо сравнить действительный коэффициент запаса прочности  $n_i$  с допускаемым коэффициентом запаса прочности  $[n]$ . Сделать заключение о прочности.

Для конкретного значения  $[n]$  (выбрать самостоятельно) определить, насколько действительная нагрузка на стержень соответствует его нагрузочной способности:

$$\Delta\sigma_i = \frac{|\sigma_i - [\sigma]|}{[\sigma]} \cdot 100\%$$

где  $[\sigma]$  – допускаемые напряжения для материала стержня.

Соответственно, при деформации растяжения  $[\sigma] = [\sigma_p] = \sigma_{вр} / [n]$ ;

при деформации сжатия  $[\sigma] = [\sigma_{сж}] = \sigma_{всж} / [n]$ .

На основании величины значения  $\Delta\sigma_i$  можно сделать вывод о рациональности заданных размеров стержня (допускается превышение нагрузки не более 5%, допускаемый недогруз – не более 15%).

Вывод о рациональности размеров стержня делается по наиболее опасному участку.

Построение эпюры продольных перемещений следует начинать от заделки стержня, где продольные перемещения отсутствуют ( $\Delta l_0 = 0$ ). Перемещение какого-либо участка ( $i$ ) стержня относительно заделки определяется как

$$\Delta l_i = \Delta l_{i-1} + \frac{N_i \cdot l_i}{A_i \cdot E},$$

где

$\Delta l_{i-1}$ ,  $\Delta l_i$  – перемещения начального и конечного сечения рассматриваемого участка ( $i$ ) стержня;

$N_i$  – продольная сила на рассматриваемом участке стержня;

$A_i$  – площадь сечения рассматриваемого участка стержня;

$l_i$  – длина рассматриваемого участка стержня;

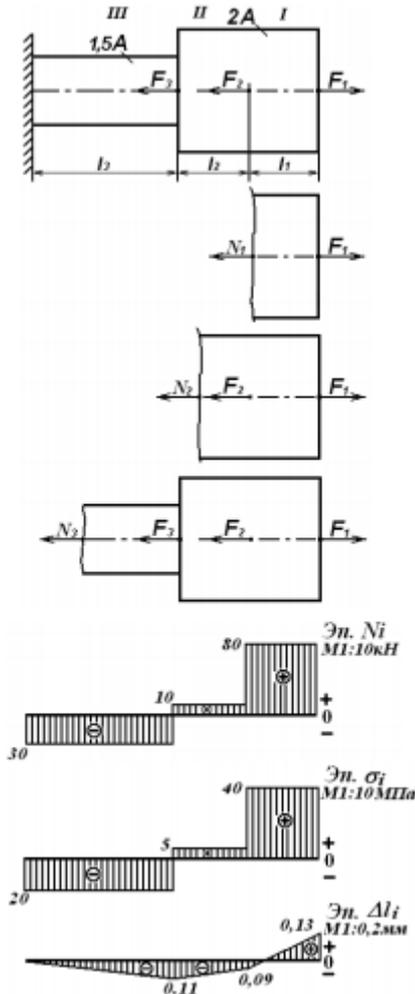
$E$  – модуль Юнга материала стержня.

### Порядок выполнения

1. Вычертить схему стержня со всеми численными данными. Определить внутренние продольные силы  $N_i$  на каждом участке. Начертить схему с эпюрой внутренних сил  $N_i$ .

2. Определить напряжения  $\sigma_i$  на каждом участке. Начертить схему с эпюрой напряжений  $\sigma_i$ .
3. Определить деформации каждого участка стержня  $\Delta l_i$  и его полную деформацию. Начертить схему с эпюрой деформаций  $\Delta l_i$ .
4. Определить коэффициент запаса прочности стержня с учетом вида деформации на участках (растяжение или сжатие). Оценить запас прочности стержня на опасных участках. Дать заключение о прочности.
5. Дать заключение о рациональности размеров стержня (недостаточная прочность или значительный недогруз).

Пример:



Дано:  $F_1 = 80$  кН;  $F_2 = 70$  кН;  $F_3 = 40$  кН;  $l_1 = 1,0$  м;  $l_2 = l_3 = 0,5$  м;  
 $A = 10$  см<sup>2</sup>;

материал стержня – чугун СЧ15:  $E = 0,9 \cdot 10^5$  МПа;

$\sigma_{вр} = 150$  МПа;  $\sigma_{всж} = 650$  МПа.

Найти: а) определить деформацию стержня;  
 б). оценить прочность стержня

Решение:

1. Разбиваем стержень на участки, начиная со свободного (не закрепленного) конца, и определяем величину продольной силы  $N_i$  в пределах каждого участка с учетом правила знаков

I участок:  $N_1 = F_1 = 80$  кН;

II участок:  $N_2 = F_1 - F_2 = 80 - 70 = 10$  кН;

III участок:  $N_3 = F_1 - F_2 - F_3 = 80 - 70 - 40 = -30$  кН.

Строим эпюру продольных сил  $N_i$  (рис. 6.1).

2. Определяем величину напряжений  $\sigma_i$  в пределах каждого участка

I участок:

$\sigma_1 = N_1 / A_1 = 80 \cdot 10^3 / (2 \cdot 10 \cdot 10^{-4}) = 40 \cdot 10^6$  Па = 40 МПа;

II участок:

$\sigma_2 = N_2 / A_2 = 10 \cdot 10^3 / (2 \cdot 10 \cdot 10^{-4}) = 5 \cdot 10^6$  Па = 5 МПа;

III участок:

$\sigma_3 = N_3 / A_3 = -30 \cdot 10^3 / (1,5 \cdot 10 \cdot 10^{-4}) = -20 \cdot 10^6$  Па = -20 МПа.

Строим эпюру напряжений  $\sigma_i$  (рис. 6.1).

3. Определяем деформации каждого участка стержня  $\Delta l_i$ , начиная от заделки, так как там продольные перемещения отсутствуют ( $\Delta l_0 = 0$ )

Строим эпюру деформаций  $\Delta l_i$  (рис. 6.1).

Рис.6.1

$$\Delta l_3 = \Delta l_0 + \frac{N_3 \cdot l_3}{A_3 \cdot E} = 0 + \frac{-30 \cdot 10^3 \cdot 0,5}{1,5 \cdot 10 \cdot 10^{-4} \cdot 0,9 \cdot 10^{11}} = -0,11 \cdot 10^{-3} = -0,11 \text{ мм};$$

$$\Delta l_2 = \Delta l_3 + \frac{N_2 \cdot l_2}{A_2 \cdot E} = -0,11 \cdot 10^{-3} + \frac{10 \cdot 10^3 \cdot 0,5}{2 \cdot 10 \cdot 10^{-4} \cdot 0,9 \cdot 10^{11}} = -0,11 \cdot 10^{-3} + 0,02 \cdot 10^{-3} = -0,09 \cdot 10^{-3} = -0,09 \text{ мм};$$

$$\Delta l_1 = \Delta l_2 + \frac{N_1 \cdot l_1}{A_1 \cdot E} = -0,09 \cdot 10^{-3} + \frac{40 \cdot 10^3 \cdot 1,0}{2 \cdot 10 \cdot 10^{-4} \cdot 0,9 \cdot 10^{11}} = -0,09 \cdot 10^{-3} + 0,22 \cdot 10^{-3} = 0,13 \cdot 10^{-3} = 0,13 \text{ мм}.$$

4. Определяем коэффициент запаса прочности и оцениваем прочность стержня в пределах каждого участка ( $[n] = 2,0 \dots 5,0$ ):

I участок: стержень растягивается

$$n_1 = \sigma_{вр} / \sigma_1 = 150/40 = 3,75 \geq [n] - \text{условие прочности выполняется};$$

II участок: стержень растягивается

$$n_2 = \sigma_{вр} / \sigma_2 = 150/5 = 30 \geq [n] - \text{условие прочности выполняется};$$

III участок: стержень сжимается

$$n_3 = \sigma_{всж} / \sigma_3 = 650/20 = 32,5 \geq [n] - \text{условие прочности выполняется}.$$

5. Оцениваем рациональность размеров стержня в опасном сечении. Примем  $[n] = 3$ .

Опасное сечение - I участок.

Допускаемое напряжение при растяжении:  $[\sigma] = \sigma_{вр} / [n] = 150/3 = 50 \text{ МПа}$ .

Недогруз стержня

$$\Delta\sigma_i = \frac{|\sigma_i - [\sigma]|}{[\sigma]} \cdot 100\% = \frac{|40 - 50|}{50} \cdot 100\% = 20\% > 15\%.$$

**Задание.** Оценить прочность хрупкого ступенчатого стержня при деформации растяжение (сжатие). Определить деформацию стержня.

Стержень изготовлен из чугуна СЧ35:

модуль продольной упругости материала стержня  $E = 1,4 \cdot 10^5 \text{ МПа}$ ;

предел прочности при растяжении:  $\sigma_{вр} = 340 \text{ МПа}$ ;

при сжатии:  $\sigma_{всж} = 1100 \text{ МПа}$ .

Допускаемый коэффициент запаса статической прочности  $[n]$  выбрать самостоятельно (для хрупких материалов принимаем  $[n] = 2,0 \dots 5,0$ ). Весом стержня пренебречь.

Схема стержня приведена на рис. 9.1. Данные для расчета приведены в табл. 9.1.

Таблица 9.1

№ варианта	$F_1, \text{кН}$	$F_2, \text{кН}$	$F_3, \text{кН}$	$A, \text{см}^2$	$l_1, \text{м}$	$l_2, \text{м}$	$l_3, \text{м}$
1	15	80	110	20	0,2	0,4	0,2
2	30	75	100	22	0,1	0,3	0,4
3	45	65	125	24	0,4	0,5	0,1
4	60	60	120	26	0,3	0,1	0,6
5	75	50	35	28	0,2	0,3	0,5
6	90	45	30	30	0,5	0,2	0,2
7	105	35	50	32	0,3	0,3	0,3
8	120	30	45	34	0,5	0,2	0,4
9	135	20	65	36	0,1	0,5	0,3
10	150	15	60	40	0,4	0,2	0,6

## Практическая работа 8

### Выполнение расчетов на жесткость при изгибе

**Цель:** научиться выполнять расчеты на жесткость при изгибе

**Основные положения и расчётные формулы при изгибе**

*Распределение нормальных и касательных напряжений при изгибе*

$$\sigma_{и} = \frac{M_{и}y}{J_x}; \tau_{max} = \frac{1,5Q}{A},$$

где  $M_{и}$  – изгибающий момент в сечении;

$Q$ -поперечная сила в сечении;

$y$  – расстояние до нейтрального слоя;

$J_x$ - осевой момент инерции сечения (рисунок 9.1)

$$W_x = \frac{J_x}{y_{max}}$$

$W_x$  – осевой момент сопротивления сечения;  $A$ -площадь сечения\

*Условие прочности при изгибе*

$$\sigma_{и}^{max} = \frac{M_{и}}{W_x} \leq [\sigma_{и}]$$

где  $[\sigma_{и}]$  – допускаемое напряжение\

*Знаки изгибающих моментов и поперечных сил (рисунок 9.2)*

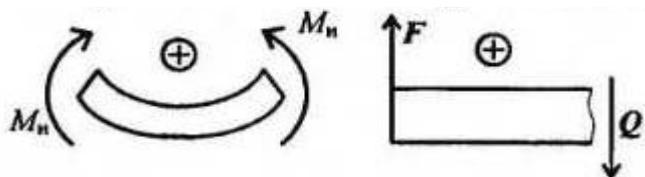


Рисунок 1

### Расчётно-графическая работа

**Задание 1:** Для одноопорной балки, нагруженной сосредоточенными силами и парой сил с моментом  $m$ , построить эпюры поперечных сил и изгибающих моментов. Найти максимальный изгибающий момент и из условия прочности подобрать поперечное сечение для балки в виде двутавра и прямоугольника с отношением сторон  $h=2b$ . Материал – сталь, допускаемое напряжение 160 МПа. Рассчитать площади поперечных сечений и сделать вывод о целесообразности применения сечения. Для выбора профелей балок использовать приложение 1.

Параметр	Вариант									
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$F_1$ , кН	10	12	14	16	18	10	22	24	26	28
$F_2$ , кН	4,4	4,8	7,8	8,4	12	12,8	17	18	22,8	24
$m$ , к · Нм	8	7	6	5	4	8	7	6	5	4
$a$ , м	0,2	0,2	0,3	0,3	0,4	0,4	0,5	0,5	0,6	0,6

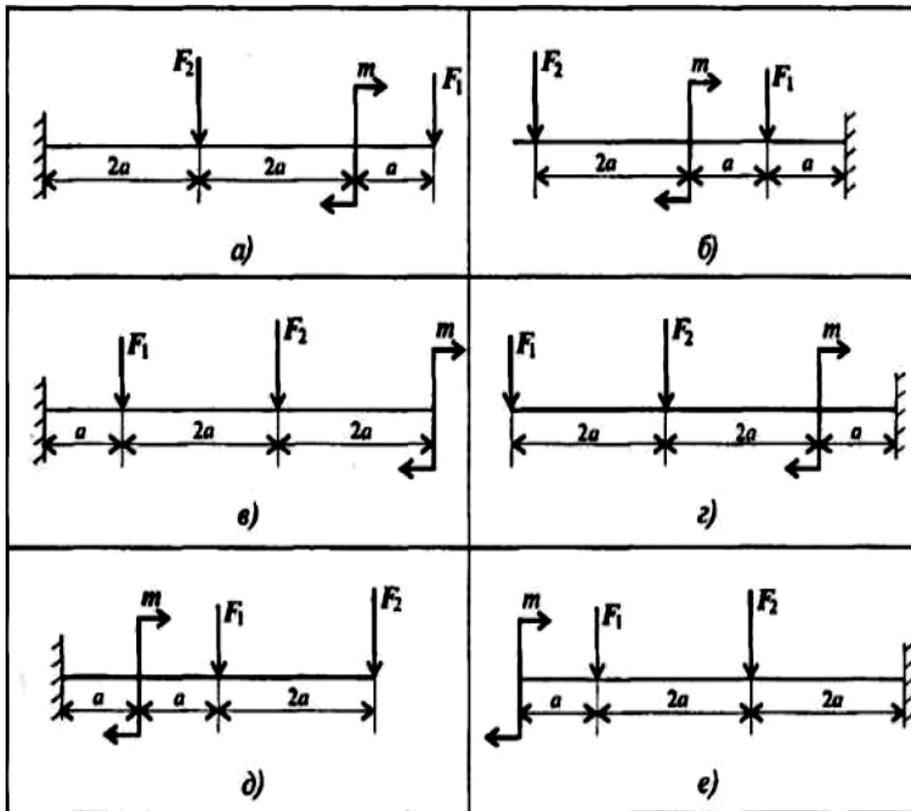


Рисунок 9.3

**Задание 2:** Для двухопорной балки, нагруженной сосредоточенными силами и парой сил с моментом, определить реакции в опорах. Найти максимальный изгибающий момент и используя условие прочности, подобрать необходимые размеры поперечных сечений. Материал – сталь, допускаемое напряжение изгиба 160 Мпа. Сечение – швеллер.

Параметр	Вариант									
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$F_1$ , кН	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19
$F_2$ , кН	4,4	4,8	7,8	8,4	12	12,8	17	18	22,8	24
$m$ , кН·м	3	4	5	6	7	7	6	5	4	3
$a$ , м	0,2	0,2	0,3	0,3	0,4	0,4	0,5	0,5	0,6	0,6

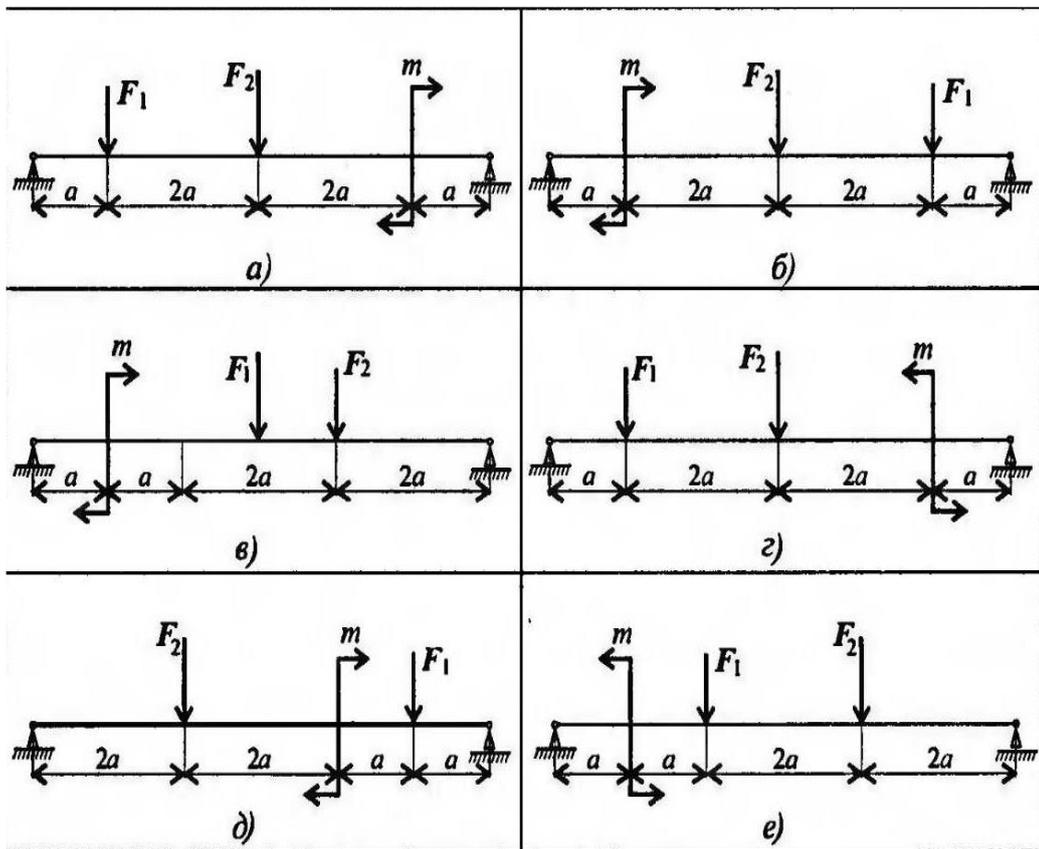


Рисунок 9.4

## ПРАКТИЧЕСКАЯ РАБОТА №9

### Выполнение расчета прямозубых передач и определение параметров зубчатых колес

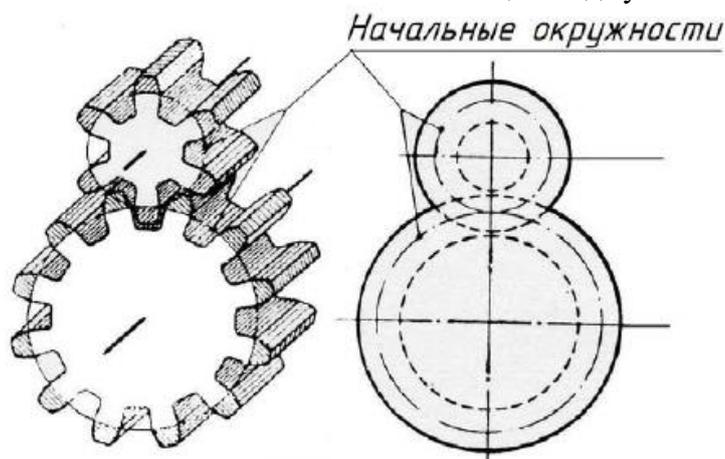
**Цель работы:** научиться рассчитывать прямозубые передачи и определять параметры зубчатых колес

В результате изучения темы учащийся должен

#### 1. Пояснение к работе

1.1. Термины, определения, обозначения, элементы зубчатых передач.

Общий вид зубчатой передачи



*Соосная поверхность зубчатого колеса* – поверхность вращения, ось которой совпадает с осью зубчатого колеса.

*Межосевая линия зубчатой передачи* – прямая линия, пересекающая оси зубчатых колес под прямым углом.

*Межосевое расстояние* ( $a_w$ ) – расстояние между осями зубчатых колес по межосевой линии.

*Начальная поверхность зубчатого колеса* – каждая из взаимокасающихся соосных поверхностей зубчатых колес передачи, относящаяся к данному зубчатому колесу, в любой точке касания которых проходящие через неё линии зубьев зубчатых колес передачи имеют общую касательную, и вектор скорости относительного движения зубчатых колес направлен вдоль неё или равен нулю.

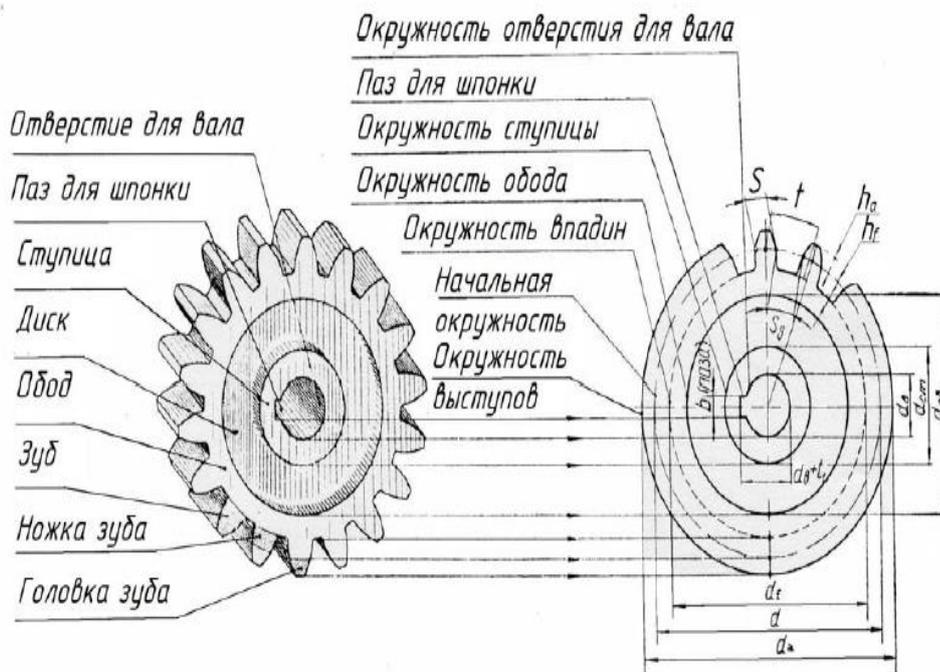
*Начальная окружность* – каждая из взаимокасающихся концентрических окружностей зубчатых колес передачи, принадлежащая начальной поверхности данного зубчатого колеса.

*Передаточное число зубчатой передачи  $i$*  – отношение числа зубьев колеса к числу зубьев шестерни.

*Радиальный зазор зубчатой передачи* – расстояние между поверхностью вершин одного из зубчатых колес передачи к поверхности впадин другого зубчатого колеса.

$Z$  – число зубьев.

$m$  – нормальный модуль зубьев – это линейная величина в  $p$  раз меньшая нормального шага зубьев.



Условные изображения элементов зубчатого колеса

$d_f$  – окружность впадин, проходящая по очертаниям впадин между зубьями:

её условно изображают сплошной тонкой линией.

$d_{ob}$  – окружность обода, обозначающая внутреннее очертание обода.

$d_{st}$  – окружность ступицы, обозначающая внешнее очертание ступицы.

$d_v$  – диаметр окружности отверстия для вала.

$h$  – высота зуба.

$h_a$  – высота головки зуба.

$h_f$  – высота ножки зуба.

$p_n$  – нормальный шаг зубьев – кратчайшее расстояние по делительной или начальной поверхности зубчатого колеса между эквидистантными одноименными теоретическими линиями соседних зубьев.

$S$  – толщина зуба.

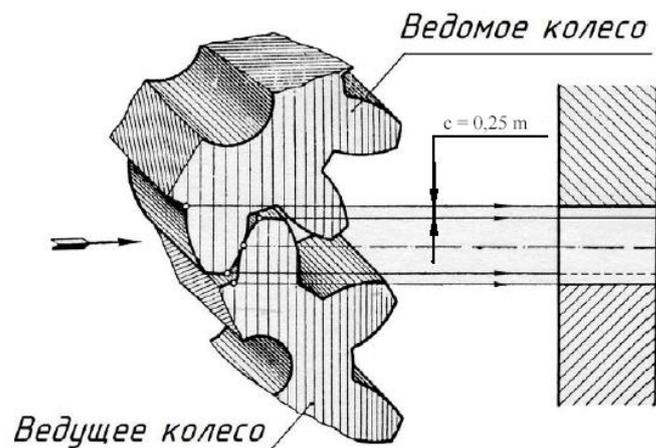
$b$  паза – ширина шпоночного паза.

$t_j$  – глубина шпоночного паза.

### 1.2. Указания по выполнению задания

Методика выполнения расчетно-графической работы “Детали зубчатой передачи” состоит из ряда этапов.

1. Сборочный чертёж зубчатой передачи выполнить в двух проекциях: главное изображение и вид слева. При выполнении сборочного чертежа нужно обратить особое внимание на правильное вычерчивание места зацепления двух зубчатых колёс – радиальный зазор передачи равный  $0,25 m$ , а также изменение типов линий окружности выступов колеса.



Радиальный зазор зубчатой передачи

2. При выполнении чертежа конструктивные размеры рассчитать по формулам, приведенным в таблице 2. Масштаб изображения выбрать самостоятельно согласно ГОСТ 2.302.

3. На сборочном чертеже нанести следующие размеры: межосевое расстояние (установочный размер) и диаметры посадочных валов.

Для шлицевых соединений показывают условное обозначение соединения.

В условном обозначении указывают:

а) обозначение поверхности центрирования:  $d$ ,  $D$ ,  $b$ .

б) номинальный размер отверстия, вала или соединения.

Пример условного обозначения при центрировании по  $D$ :  $D6 \times 18 \times 22 \times 5$

Эта запись читается так: шлицевое отверстие с прямобоковыми зубьями, центрирование по наружному диаметру  $D$ , число зубьев  $6$ , внутренний диаметр отверстия  $18$  мм, наружный диаметр отверстия  $22$  мм, ширина впадины отверстия  $5$  мм.

4. На сборочном чертеже в графе основной надписи в соответствии с заданием написать: *Передача цилиндрическая.*

Зубчатое колесо показывают в трех изображениях: продольным фронтальным разрезом на месте главного вида, местным видом на отверстие на виде слева и выносным элементом шлица. Окружности и образующие поверхностей выступов зубьев зубчатого венца и отверстия показывают сплошными основными линиями.

Окружности и образующие поверхностей впадин зубчатого венца и отверстия впадин на продольных разрезах показывают сплошными основными линиями; на виде слева - сплошными тонкими линиями, причем окружности впадин зубчатого венца допускается не показывать. Делительные окружности и образующие делительных поверхностей на изображениях цилиндрических зубчатых колёс показывают штрихпунктирной линией.

Если секущая плоскость проходит через ось зубчатого колеса, то на разрезах и сечениях зубья зубчатого венца условно совмещают с плоскостью чертежа и показывают нерассечёнными, а на разрезах и сечениях отверстий впадины условно совмещают с плоскостью чертежа.

На плоскости перпендикулярной оси отверстия, изображают профиль одного выступа и двух впадин.

На рабочем чертеже зубчатого колеса должны быть помещены таблицы параметров зубчатого венца и параметров шлицевого отверстия.

**1.3. Практическое задание рассчитано на 2 часа.**

## 2. Программа работ

**2.1.** По заданному модулю ( $m$ ), числу зубьев ( $z$ ), диаметру отверстия ( $d_v$ ) выполнить расчёты и вычертить детали зубчатой передачи.

**2.2.** Выполнить практическую работу по определению модуля и остальных параметров зубчатого колеса по модели.

2.3. Выполнить рабочий чертёж зубчатого колеса.

Таблица 1 – Исходные данные для расчета.

Наименование параметра	Обозначение	Числовые значения
Число зубьев колеса	$z$	Смотри вариант задания
Модуль	$m$	
Диаметр отверстия колеса	$d_b$	

Таблица 2 – Расчет основных геометрических параметров цилиндрической зубчатой передачи

Наименование параметра	Обозначение	Расчётная формула
Межосевое расстояние	$a_w$	$a_w = \frac{(Z_{\text{колеса}} + Z_{\text{шестерни}})m}{2}$
Делительный диаметр	$d$	$d = Z \cdot m$
Диаметр вершин зубьев	$d_a$	$d_a = m \cdot (Z + 2)$
Диаметр впадин зубьев	$d_f$	$d_f = m \cdot (Z - 2,5)$
Радиальный зазор	$C$	$C = 0,25 \cdot m$
Высота головки зуба	$h_f$	$h_f = m$
Высота ножки зуба	$h_a$	$h_a = 1,25 \cdot m$
Высота зуба	$h$	$h = 2,25 \cdot m$
Нормальный шаг	$P_n$	$P_n = \pi \cdot m$

3. Вопросы для контроля

1. Расскажите порядок проектирования зубчатой цилиндрической передачи.
2. Назовите критерии работоспособности передачи.
3. Перечислите типы зубчатых передач и назовите их преимущества и недостатки.
4. Назовите конструктивные параметры зубчатых передач.

## Практическое занятие 10

### Выполнение расчета прямозубых передач и определение параметров зубчатых колес

**Цель работы:** овладеть навыками кинематического, силового и геометрического расчета передач. В результате выполнения практической работы студенты

**должны уметь:**

- выбирать детали зубчатых передач;
- выполнять кинематические, геометрические и силовые расчеты;

**должны знать:**

- виды механических передач, методы кинематического и силового расчета;
- методы расчета параметров механических передач;

**Порядок выполнения практической работы**

1. Усвоить теоретический материал по теме «Цилиндрические зубчатые передачи», «Расчет на прочность цилиндрических прямозубых передач».
2. По таблице выписать данные соответствующие варианту и начертить схему привода в тетради.
3. Произвести расчеты, сделать чертежи по полученным параметрам.

### Теоретическая часть

#### Расчет цилиндрических прямозубых колес редуктора

Выбирается материал со средними механическими свойствами. По таблице 3.3[1]

Допускаемые контактные напряжения

$$[\sigma_H] = \frac{\sigma_{Hlimb} \cdot K_{HL}}{[S_H]}$$

где,  $\sigma_{Hlimb}$  – предел контактной выносливости;

$$\sigma_{Hlimb} = 2HB + 70;$$

$K_{HL}$  – коэффициент долговечности;

$[S_H]$  – коэффициент безопасности;

Межосевое расстояние из условия контактной выносливости

$$a_o = K_a \cdot (u_p + 1) \cdot \sqrt[3]{\frac{T_3 \cdot K_H}{[\sigma_H]^2 \cdot u_p^2 \cdot \Psi_{sa}}};$$

где  $K_a$  - коэффициент формы зуба;

$\Psi_{sa}$  – коэффициент ширины венца, для прямозубых колес;

$K_H$  – коэффициент учитывающий неравномерность распределения нагрузки, по таблице 3.1[1].

Нормальный модуль

$$m_n = (0,01 \div 0,02)a_w;$$

Число зубьев шестерни и колеса.

$$Z_1 = \frac{2 \cdot a_w}{(u+1)m_n};$$

$$Z_2 = Z_1 \cdot u_p$$

Геометрические параметры шестерни и колеса.

Делительные диаметры

$$d_1 = m \cdot Z_1;$$

$$d_2 = m \cdot Z_2;$$

Проверка межосевого расстояния

$$a_w = \frac{d_1 + d_2}{2};$$

диаметры вершин зубьев

$$d_{a_1} = d_1 + 2m_n$$

$$d_{a_2} = d_2 + 2m_n$$

Диаметр окружности впадин

$$d_{f_1} = d_1 - 2,5m_n$$

$$d_{f_2} = d_2 - 2,5m_n$$

ширина венца колеса:

$$b_2 = \Psi_{ea} \cdot a_w;$$

ширина венца шестерни:

$$b_1 = b_2 + 5\text{мм};$$

Коэффициент ширины шестерни по диаметру

$$\Psi_{ed} = \frac{b_1}{d_1};$$

Окружная скорость колес

$$v = \frac{\omega_2 \cdot d_1}{2};$$

Проверка зубьев колес по контактным напряжениям

$$\sigma_H = \frac{310}{a_w} \cdot \sqrt{\frac{T_3 K_H \cdot (u+1)^3}{b_2 \cdot u^2}};$$

$$K_H = K_{H\alpha} \cdot K_{H\beta} \cdot K_{H\nu};$$

где  $K_{H\beta}$  - коэффициент, учитывающий неравномерность распределения нагрузки по ширине венца по таблице 3.5[1]

$K_{H\alpha}$  - коэффициент, учитывающий неравномерность распределения нагрузки между зубьями по таблице 3.4[1]

$K_{H\nu}$  - коэффициент, учитывающий динамическое действие нагрузки по таблице 3.6[1]

Силы, действующие в зацеплении

Окружная сила

$$F_t = \frac{2 \cdot T_2}{d_1};$$

Радиальная

$$F_r = F_t \cdot \operatorname{tg} \alpha; ;$$

Коэффициент нагрузки

$$K_F = K_{F\beta} \cdot K_{Fv}$$

где  $K_{F\beta}$  - коэффициент, учитывающий неравномерность распределения нагрузки по длине зуба по таблице 3.7[1];

$K_{Fv}$  - коэффициент, учитывающий динамическое действие нагрузки по таблице 3.8[1]

Коэффициент, учитывающий форму зуба страница 42[1]

Допускаемые напряжения изгиба

$$[\sigma_F] = \frac{\sigma_F^0 \lim b}{[S_F]},$$

где  $\sigma_F^0 \lim b$  - предел выносливости при отнулевом цикле, по таблице 3.9[1]

$[S_F]$  - коэффициент безопасности

Дальнейший расчет ведется для зубьев колеса.

Проверка зубьев по напряжениям изгиба

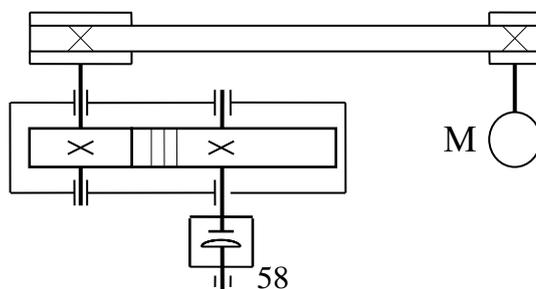
$$\sigma_F = \frac{F_t \cdot Y_F \cdot K_F}{v_2 \cdot m};$$

Таблица исходных данных

Вар.№	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
Тз Нм	330	340	350	360	400	500	580	220	240	250	370	650	600	300	310
$u_{ред}$	1,25	1,6	2	2,5	3,15	4	5	1,4	1,8	2,24	2,8	3,55	4,5	1,25	1,6
пз об/мин	60	70	90	60	50	55	70	80	90	60	55	70	60	90	85

Вар.№	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
Тз Нм	350	400	440	520	300	320	330	340	460	480	280	350	370	450	510
$u_{ред}$	2	2,5	3,15	4	1,4	1,2	2,24	2,8	3,55	4,5	1,25	1,6	2	2,5	3,15
пз об/мин	70	50	60	70	100	110	120	80	70	60	115	100	95	70	40

### Пример расчета



Исходные данные:  $T_3 = 496 \text{ Нм}$ ;  $u_{ред} = 4$ ;  $n_3 = 70 \text{ об/мин}$ .

Выбирается материал со средними механическими свойствами. Для колеса и шестерни сталь 45, термическая обработка улучшение. По таблице 3.3[1]

для колеса –  $HB 200$ ;

для шестерни –  $HB 230$ .

Допускаемые контактные напряжения

$$[\sigma_H] = \frac{\sigma_{Hlimb} \cdot K_{HL}}{[S_H]}$$

где,  $\sigma_{Hlimb}$  – предел контактной выносливости;

$$\sigma_{Hlimb} = 2HB + 70 ;$$

Для шестерни  $\sigma_{H1limb} = 2 \cdot 230 + 70 = 530 \text{ МПа}$ ,

Для колеса  $\sigma_{H2limb} = 2 \cdot 200 + 70 = 470 \text{ МПа}$ ,

$K_{HL}$  – коэффициент долговечности;  $K_{HL} = 1$

$[S_H]$  – коэффициент безопасности;  $[S_H] = 1,1$

для шестерни  $[\sigma_{H1}] = \frac{530 \cdot 1}{1,1} \approx 482 \text{ МПа}$ ,

для колеса  $[\sigma_{H2}] = \frac{470 \cdot 1}{1,1} \approx 428 \text{ МПа}$ ,

Межосевое расстояние из условия контактной выносливости

$$a_w = K_a \cdot (u_p + 1) \cdot \sqrt[3]{\frac{T_3 \cdot K_H}{[\sigma_H]^2 \cdot u_p^2 \cdot \Psi_{\sigma a}}}$$

где  $K_a$  – коэффициент формы зуба  $K_a = 49,5$ ;

$\Psi_{\sigma a}$  – коэффициент ширины венца, для прямозубых колес  $\Psi_{\sigma a} = 0,25$ ;

$K_H = 1$  – коэффициент учитывающий неравномерность распределения нагрузки, по таблице 3.1[1].

$$a_w = 49,5 \cdot (4 + 1) \cdot \sqrt[3]{\frac{476 \cdot 10^3 \cdot 1}{410^2 \cdot 4^2 \cdot 0,25}} = 221 \text{ мм};$$

Принимается из стандартного ряда  $a_w = 250 \text{ мм}$ ;

Нормальный модуль

$$m_n = (0,01 \div 0,02) \cdot a_w ;$$

$$m_n = (0,01 \div 0,02) \cdot 250 = 2,5 \div 5 \text{ мм};$$

Принимается из стандартного ряда  $m_n = 4 \text{ мм}$

Число зубьев шестерни и колеса.

$$Z_1 = \frac{2 \cdot a_w}{(u + 1)m_n} ;$$

$$Z_1 = \frac{2 \cdot 250}{(4+1) \cdot 4} = 25;$$

Принимается  $Z_1 = 25$ , тогда

$$Z_2 = Z_1 \cdot u_p$$

$$Z_2 = 25 \cdot 4 = 100;$$

Геометрические параметры шестерни и колеса.

Делительные диаметры

$$d_1 = m \cdot Z_1;$$

$$d_2 = m \cdot Z_2;$$

$$d_1 = 4 \cdot 25 = 100 \text{ мм};$$

$$d_2 = 4 \cdot 100 = 400 \text{ мм};$$

Проверка межосевого расстояния

$$a_w = \frac{d_1 + d_2}{2};$$

$$a_w = \frac{100 + 400}{2} = 250 \text{ мм};$$

диаметры вершин зубьев

$$d_{a_1} = d_1 + 2m_n$$

$$d_{a_1} = 100 + 2 \cdot 4 = 108 \text{ мм};$$

$$d_{a_2} = d_2 + 2m_n$$

$$d_{a_2} = 400 + 2 \cdot 4 = 408 \text{ мм};$$

Диаметр окружности впадин

$$d_{f_1} = d_1 - 2,5m_n$$

$$d_{f_1} = 100 - 2,5 \cdot 4 = 90 \text{ мм};$$

$$d_{f_2} = d_2 - 2,5m_n$$

$$d_{f_2} = 400 - 2,5 \cdot 4 = 390 \text{ мм};$$

ширина венца колеса:

$$b_1 = \Psi_{ea} \cdot a_w;$$

$$b_1 = 0,25 \cdot 250 = 62,5 \text{ мм};$$

Принимается  $b_1 = 63 \text{ мм}$

ширина венца шестерни:

$$b_2 = b_1 + 5 \text{ мм};$$

$$b_2 = 63 + 5 \text{ мм} = 68 \text{ мм};$$

Коэффициент ширины шестерни по диаметру

$$\Psi_{ed} = \frac{b_1}{d_1};$$

$$\Psi_{ed} = \frac{63}{100} = 0,63;$$

Окружная скорость колес

$$v = \frac{\omega_2 \cdot d_1}{2};$$

$$v = \frac{29,3 \cdot 100}{2 \cdot 10^3} = 1,5 \frac{m}{c};$$

При такой скорости назначается 8 – ая степень точности зубчатых колес.

Проверка зубьев колес по контактным напряжениям

$$\sigma_H = \frac{310}{a_w} \cdot \sqrt{\frac{T_3 K_H \cdot (u+1)^3}{\sigma_2 \cdot u^2}};$$

$$K_H = K_{H\alpha} \cdot K_{H\beta} \cdot K_{Hv};$$

где  $K_{H\beta}$  - коэффициент, учитывающий неравномерность распределения нагрузки по ширине венца по таблице 3.5[1]  $K_{H\beta} = 1,02$ ;

$K_{H\alpha}$  - коэффициент, учитывающий неравномерность распределения нагрузки между зубьями по таблице 3.4[1]  $K_{H\alpha} = 1$ ;

$K_{Hv}$  - коэффициент, учитывающий динамическое действие нагрузки по таблице 3.6[1]  $K_{Hv} = 1,05$ ;

$$K_H = 1 \cdot 1,02 \cdot 1,05 = 1,07;$$

$$\sigma_H = \frac{310}{250} \cdot \sqrt{\frac{476 \cdot 10^3 \cdot 1,07 \cdot (4+1)^3}{63 \cdot 4^2}} = 312 \text{ МПа} < [\sigma_H];$$

Условие прочности выполнено.

Силы, действующие в зацеплении

Окружная сила

$$F_t = \frac{2 \cdot T_2}{d_1};$$

$$F_t = \frac{2 \cdot 125 \cdot 10^3}{100} = 2500 \text{ Н};$$

Радиальная сила

$$F_r = F_t \cdot \text{tg } \alpha;$$

$$F_r = 2500 \cdot 0,364 = 910 \text{ Н};$$

Коэффициент нагрузки

$$K_F = K_{F\beta} \cdot K_{Fv};$$

где  $K_{F\beta}$  - коэффициент, учитывающий неравномерность распределения нагрузки по длине зуба по таблице 3.7[1]  $K_{F\beta} = 1,05$ ;

$K_{Fv}$  - коэффициент, учитывающий динамическое действие нагрузки по таблице 3.8[1]  $K_{Fv} = 1,25$ ;

$$K_F = 1,05 \cdot 1,25 = 1,3;$$

Коэффициент, учитывающий форму зуба

страница 42[1]  $Y_{F1} = 3,9$ ;  $Y_{F2} = 3,6$ . при  $Z_1 = 25$ ;  $Z_2 = 100$ .

Допускаемые напряжения изгиба

$$[\sigma_F] = \frac{\sigma_F^0 \lim b}{[S_F]},$$

где  $\sigma_F^0 \lim b$  - предел выносливости при отнулевом цикле, по таблице 3.9[1]

при  $[\sigma_F] = 1,8HB$

для шестерни:

$$\sigma_F^0 \lim b = 1,8 \cdot 230 = 415 \text{ МПа}$$

для колеса:

$$\sigma_F^0 \lim b = 1,8 \cdot 200 = 360 \text{ МПа}$$

$[S_F]$  - коэффициент безопасности  $[S_F] = 1,75$

для шестерни

$$[\sigma_{F_1}] = \frac{415}{1,75} = 237 \text{ МПа}$$

для колеса

$$[\sigma_{F_2}] = \frac{360}{1,75} = 206 \text{ МПа}$$

отношение  $\frac{[\sigma_F]}{Y_F}$

для шестерни

$$\frac{237}{3,9} = 60,8 \text{ МПа}$$

для колеса

$$\frac{206}{3,6} = 57,2 \text{ МПа}$$

Дальнейший расчет ведется для зубьев колеса.

Проверка зубьев по напряжениям изгиба

$$\sigma_F = \frac{F_t \cdot Y_F \cdot K_F}{v_2 \cdot m};$$

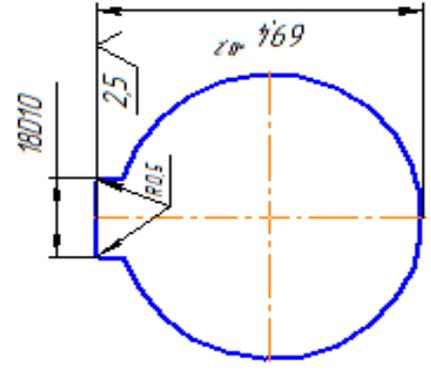
$$\sigma_F = \frac{2500 \cdot 1,3 \cdot 3,6}{63 \cdot 4} = 46 \text{ МПа} \quad \langle [\sigma_{F_2}] = 206 \text{ МПа};$$

Условие прочности выполнено.

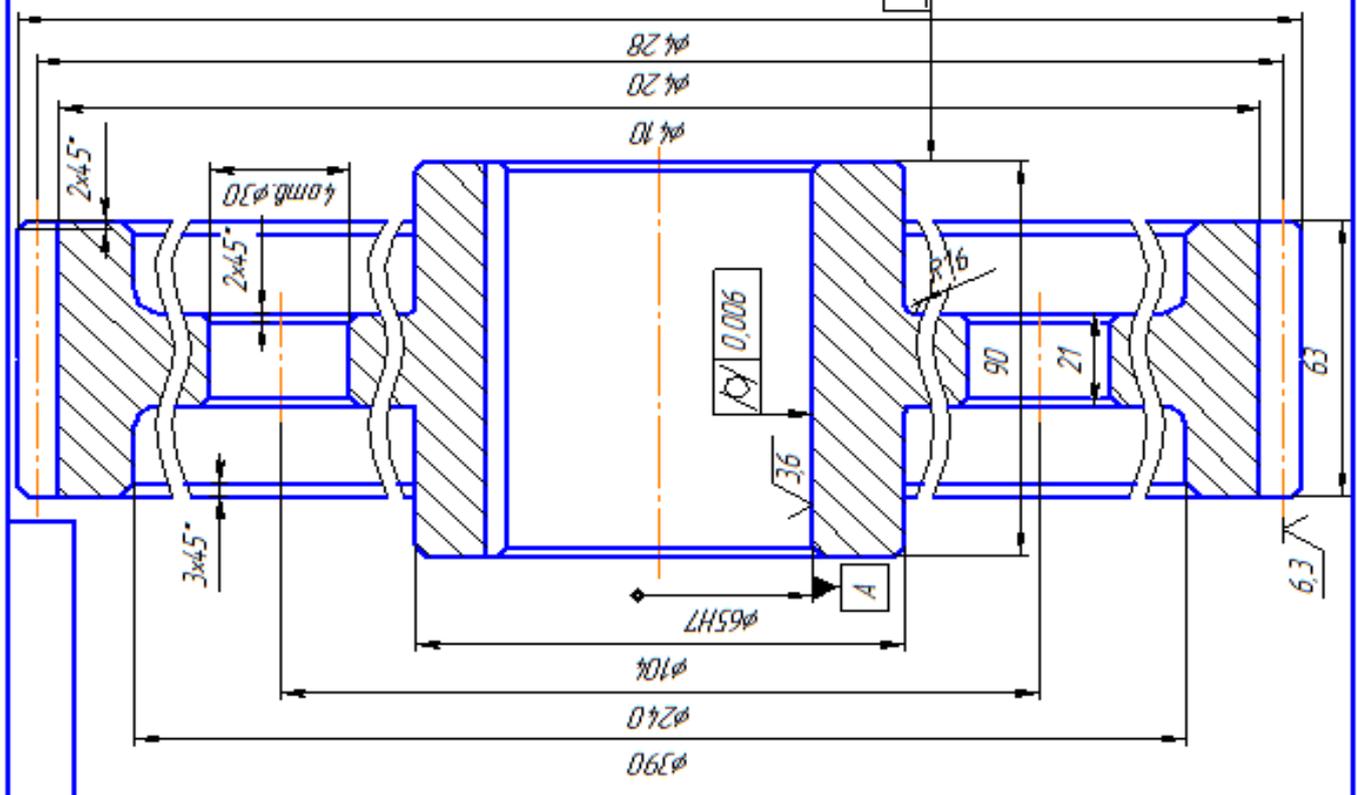


√ 3,2 (√)

Модуль	m	4,0
Число зубьев	z	105
Нормальный исходный контур	-	ГОСТ 13755-81
Коэффициент смещения	x	0
Степень точности по ГОСТ 1643-81	-	7-с
Делительный диаметр	d	420



1. HB 215-240  
2. h14;  $\frac{IT14}{2}$



№ докум.	И. док.	Изд.	Матр.	Лист	Масса	Материал
						11
№ изм.	№ док.	Изд.	Матр.	Лист	Масса	Материал
Колесо зубчатое						Сталь 45 ГОСТ1050-88
Формат А3						

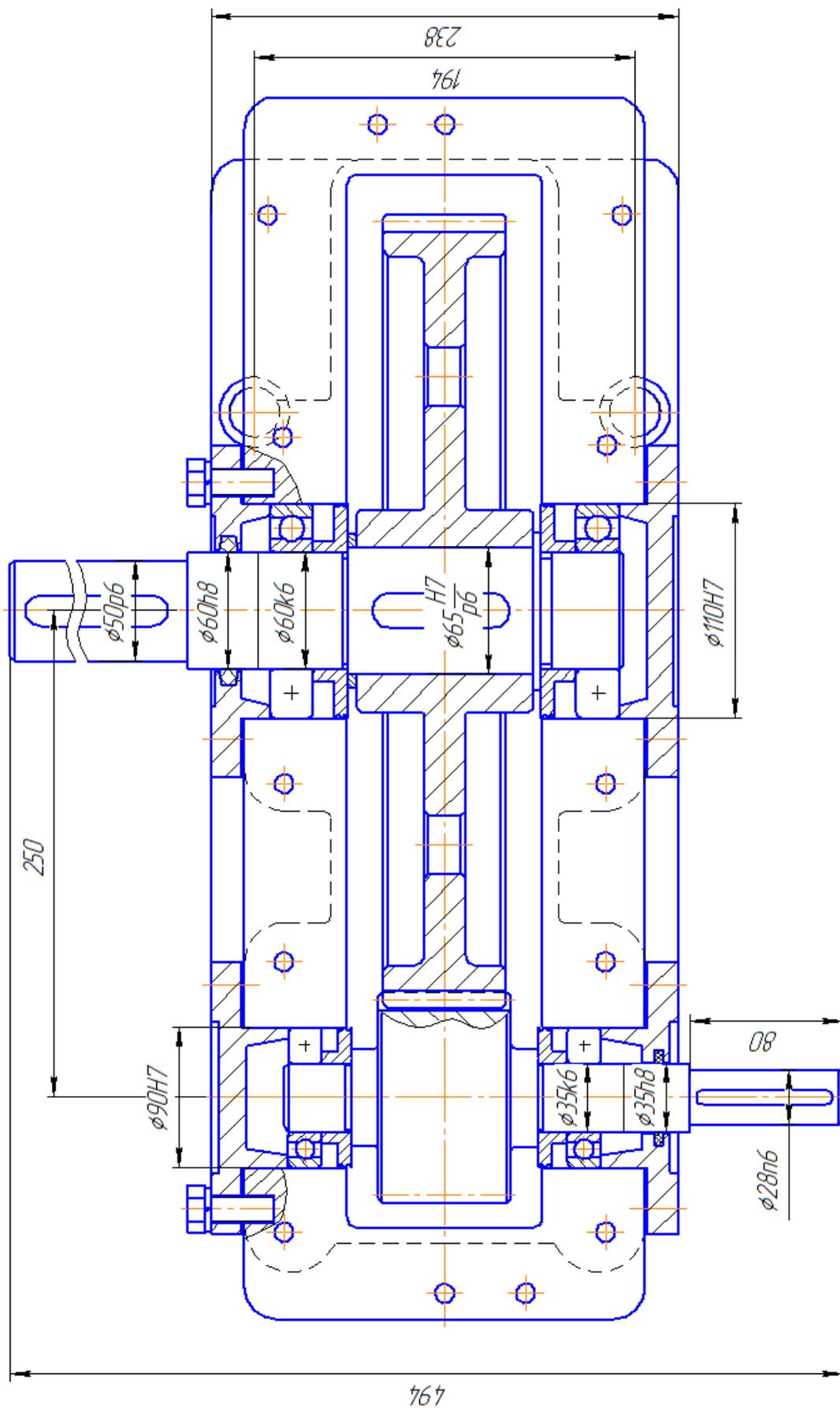


Рисунок 1 – Зубчатое зацепление

**Основные источники:**

1. Зиомковский, В. М. Техническая механика : учебное пособие для среднего профессионального образования / В. М. Зиомковский, И. В. Троицкий ; под научной редакцией В. И. Вешкурцева. — Москва : Издательство Юрайт, 2024. — 288 с. — (Профессиональное образование). — ISBN 978-5-534-10334-2. — Текст : электронный // Образовательная платформа Юрайт [сайт]. — URL: <https://urait.ru/bcode/542084>

**Дополнительные источники:**

- Аркуша А.И. Техническая механика. Теоретическая механика и сопротивление материалов: Учебник для средних учебных заведений. 6-е изд. - М.: Высшая школа, 2013.
- Олофинская В.П. Техническая механика: Курс лекций с вариантами практических и тестовых заданий: Учебное пособие / В.П. Олофинская. 3-е изд., испр.- М.: Форум, 2013

**Электронные образовательные ресурсы:**

1. Электронный ресурс «Техническая механика». Форма доступа: [technical-mechanics.narod.ru](http://technical-mechanics.narod.ru)