Государственное бюджетное профессиональное образовательное учреждение
Иркутской области
«Иркутский техникум транспорта и строительства»

МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ

для выполнения практических работ по учебной дисциплине

ЕН.01 Математика

по специальности среднего профессионального образования
15.02.10. Мехатроника и мобильная робототехника

Квалификация: специалист

Форма обучения - очная

Нормативный срок обучения - 3 года и 10 мес.

на базе основного общего образования

Иркутск, 2023

Методические указания разработаны на основе рабочей программы дисциплины. Методические указания содержат рекомендации к практическим работам, требования к знаниям и умениям. Приведён список основной литературы и нормативных документов, рекомендованных для подготовки к работам.

Текущие практические работы представлены в логической последовательности, согласно учебному плану.

Организация-разработчик: ГБПОУ ИО «Иркутский техникум транспорта и строительства»

Разработчик: преподаватель первой квалификационной категории А.С. Котлярова

Рассмотрена и одобрена на заседании ДЦК
Протокол № 10 от 01.06. 2023г.

СОДЕРЖАНИЕ

1.ВВЕДЕНИЕ

Методические указания к практическим занятиям разработаны в соответствии с ФГОС СПО по специальности **23.02.07 Техническое обслуживание и ремонт двигателей, систем и агрегатов автомобилей,** рабочим учебным планом и рабочей программой дисциплины ЕН **Математика** для студентов очной формы обучения. Рабочий учебный план, предусматривает изучение курса в течении 1 семестра.

Программа предусматривает 38 часов общего объема времени на этот вид работы, а также распределение времени на выполнение заданий в зависимости от их сложности и объема.

Программа практических занятий предполагает практическое осмысление и освоение следующих разделов:
- Дифференциальное и интегральное исчисление.
- Матрицы и определители.
- Комплексные числа.
- Множества и операции над множествами.
- Основы комбинаторики.
- Теория вероятностей. Математическая статистика.

Выполнение студентами практических занятий направлено на:
- обобщение, систематизацию, углубление теоретических знаний;
- формирование умений применять полученные знания в практической деятельности;
- развитие аналитических, проектировочных, конструктивных умений;
- выработку самостоятельности, ответственности, точности и творческой инициативы.

В результате выполнения практических занятий обучающийся должен:
уметь:
- решать обыкновенные дифференциальные уравнения.

знать:
- основные понятия и методы математического анализа, дискретной математики, теории вероятностей и математической статистики.
- основные численные методы решения прикладных задач.

В процессе освоения дисциплины студент должен овладевать общими компетенциями:

ОК 01. Выбирать способы решения задач профессиональной деятельности, применительно к различным контекстам.
ОК 02. Осуществлять поиск, анализ и интерпретацию информации, необходимой для выполнения задач профессиональной деятельности.
ОК 03. Планировать и реализовывать собственное профессиональное и личностное развитие.
ОК 04. Работать в коллективе и команде, эффективно взаимодействовать с коллегами, руководством, клиентами.
ОК 05. Осуществлять устную и письменную коммуникацию на государственном языке с учетом особенностей социального и культурного контекста.
ОК 06. Проявлять гражданско-патриотическую позицию, демонстрировать осознанное поведение на основе традиционных общечеловеческих ценностей.
ОК 07. Содействовать сохранению окружающей среды, ресурсосбережению, эффективно действовать в чрезвычайных ситуациях.

ОК 08. Использовать средства физической культуры для сохранения и укрепления здоровья в процессе профессиональной деятельности и поддержания необходимого уровня физической подготовленности.
ОК 09. Использовать информационные технологии в профессиональной деятельности.
ОК 10. Пользоваться профессиональной документацией на государственном и иностранном языке.
ОК 11. Планировать предпринимательскую деятельность в профессиональной сфере.

Практические занятия - один из видов практического обучения, имеющий целью закрепление теоретических знаний и формирование практических умений и навыков. Практическая работа по математике заключается в выполнении студентами под руководством преподавателя комплекса учебных заданий, направленных на усвоение основ учебной дисциплины, приобретение практических навыков решения примеров и задач.

Методиские указания к выпонению практических работ содержат:
- тему;
- количество часов;
- цель работы;
- задание для практической работы;
- контрольные вопросы

Критерии оценки практических занятий:

Отметка "5" ставится при условии, если:
работа выполнена полностью;
в логических рассуждениях и обосновании нет пробелов и ошибок;
в решении нет математических ошибок (возможна одна неточность, описка, не являющаяся следствие незнания или непонимания учебного материала)

Отметка "4" ставится при условии, если:
работа выполнена полностью, но обоснования шагов решения недостаточны (если умение обосновывать рассуждения не являлось специальным объектом проверки);
допущена одна существенная ошибка или две-три несущественных ошибки

Отметка "3" ставится при условии, если:
допущены более одной существенной ошибки или более двух-трех несущественных ошибок, но обучающийся владеет обязательными умениями по проверяемой теме; при этом правильно не выполнено менее половины работы

Отметка "2" ставится при условии, если:
допущены существенные ошибки, показавшие. что обучающийся не владеет обязательными умениями по данной теме в полной мере.

К категории *существенных ошибок* следует отнести ошибки, связанные с незнанием, непониманием обуваюшимися основных положений теории и с неправильным применением методов, способов, приемов решения практических заданий, предусмотренных программой

К категории *несущественных ошибок* следует отнести погрешности, связанные с небрежным выполнением записей, рисунков, графиков, чертежей, а также погрешности и недочеты, которые не приводят к искажению смысла задания и его выполнения.

2.ПЕРЕЧЕНЬ ПРАКТИЧЕСКИХ ЗАНЯТИЙ

№ п/п	Тематика практических занятий	Количество часов.
1.	Вычисление пределов	2
2.	Нахождение пределов функций с помощью замечательных пределов.	
3.	Непрерывность функции	2
4.	Вычисление производной и исследование функции.	2
5.	Дифференциал функции. Частные производные.	2
6.	Вычисление неопределенных интегралов.	2
7.	Вычисление определенных интегралов.	2
8.	Действия с матрицами.	2
9.	Нахождение обратной матрицы.	2
10.	Решение систем линейных уравнений методами линейной алгебры.	2
11.	Решение СЛАУ различными методами.	2
12.	Действия над комплексными числами.	2
13.	Формы комплексного числа.	2
14.	Применение метода комплексных чисел для решения прикладных задач.	2
15.	Основы комбинаторики	2
16.	Решение задач.	2
17.	Решение практических задач на определение вероятности события.	2
18.	Решение задач с реальными дискретными случайными величинами.	2
19.	Характеристики случайной величины.	2
	Итого	**38**

3. СОДЕРЖАНИЕ ПРАКТИЧЕСКИХ ЗАНЯТИЙ И МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ К ИХ ВЫПОЛНЕНИЮ

ПРАКТИЧЕСКОЕ ЗАНЯТИЕ №1

1.Тема: Вычисление пределов.

2.Количество часов: 2

3.Цель работы: научиться вычислять пределы, раскрывать неопределенности вида $\frac{\infty}{\infty}$; $\frac{0}{0}$.

4.Необходимые знания для выполнения задания

$\lim\limits_{x\to\infty}\frac{1}{x}=0$ - бесконечно малая величина

$\lim\limits_{x\to 0}\frac{1}{x}=\infty$ - бесконечно большая величина

Алгоритм решения:

1. Подставить в выражение предельное значение аргумента.
2. Определить есть или нет неопределенность. Если нет, дать ответ.
3. Если неопределенность есть, то по ее виду выбрать одно из правил устранения этой неопределенности.
4. Преобразовать выражение согласно выбранному правилу, и к новой форме предела применить данный алгоритм, начиная с п.1.

Правило 1.

$\lim\limits_{x\to\infty}\frac{f_1(x)}{f_2(x)}=\left[\frac{\infty}{\infty}\right]\Rightarrow$ В числителе и знаменателе вынести x в максимальной степени, если это возможно.

Правило 2.

$\lim\limits_{x\to x_0}\frac{f_1(x)}{f_2(x)}=\left[\frac{0}{0}\right]\Rightarrow$ Числитель и знаменатель разделить одновременно на $(x-x_0)$, если это возможно.

5. Задание для практической работы

Вычислить	
1	1) $\lim\limits_{x\to 2}(2x^2-3x+4)$; 2) $\lim\limits_{x\to -1}(x^3-x^2+1)$; 3) $\lim\limits_{x\to 0}(3x^3+x^2+8x+10)$; 4) $\lim\limits_{x\to 2}((x^2-1)(x-3)(x-5))$; 5) $\lim\limits_{x\to 1}\frac{(x+3)(x-2)}{x+2}$; 6) $\lim\limits_{x\to 4}\frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}-1}$.

2	1) $\lim\limits_{x\to 3} \dfrac{3}{2x-6}$; 2) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{4}{3x^2+2x}$; 3) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{2x^3-2x^2}{5x^3-4x^2}$; 4) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{3x^3+x}{x}$; 5) $\lim\limits_{x\to 3} \dfrac{x-3}{x^2-9}$; 6) $\lim\limits_{x\to(-3/2)} \dfrac{4x^2-9}{2x+3}$;

ПРАКТИЧЕСКОЕ ЗАНЯТИЕ №2

1.Тема: Нахождение пределов функций с помощью замечательных пределов.

2.Количество часов: 2

3.Цель работы: научиться вычислять пределы, раскрывать неопределенности вида $\frac{\infty}{\infty}$; $\frac{0}{0}$.

4.Необходимые знания для выполнения задания

$\lim\limits_{x\to\infty} \frac{1}{x} = 0$ - бесконечно малая величина

$\lim\limits_{x\to 0} \frac{1}{x} = \infty$ - бесконечно большая величина

Алгоритм решения:

5. Подставить в выражение предельное значение аргумента.
6. Определить есть или нет неопределенность. Если нет, дать ответ.
7. Если неопределенность есть, то по ее виду выбрать одно из правил устранения этой неопределенности.
8. Преобразовать выражение согласно выбранному правилу, и к новой форме предела применить данный алгоритм, начиная с п.1.

<u>**Правило 3.**</u>

При вычислении пределов от иррациональных выражений, не попадающих в предыдущие правила, следует избавиться от корней, входящих в неопределенность. Возможны следующие способы:

3.1. замена переменной $x = t^m$, позволяющая извлечь корни, входящие в неопределенность;

3.2. дополнение до формулы, позволяющей возвести корень в соответствующую ему степень; здесь используются формулы: $(a-b)(a+b) = a^2 - b^2$; $(a \pm b)(a^2 \mp ab + b^2) = a^3 \pm b^3$.

Например, $\sqrt{x+a}-\sqrt{x+b}=$
$=\frac{(\sqrt{x+a}-\sqrt{x+b})(\sqrt{x+a}+\sqrt{x+b})}{\sqrt{x+a}+\sqrt{x+b}}=\frac{a-b}{\sqrt{x+a}+\sqrt{x+b}}$, т.е. умножили и разделили на сопряженное выражение.

Правило 4.

При наличии неопределенности в пределе от выражения, содержащего тригонометрические функции, следует выделить в этом выражении **первый замечательный предел:**

$$\lim_{\alpha\to 0}\frac{\sin\alpha}{\alpha}=1. \quad (1)$$

5. Задание для практической работы

Вычислить		
1	1) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{2x^3-3x^2+1}{x^3+4x^2+2x}$; 3) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x^5+x^6}{x^3+x^4}$; 5) $\lim\limits_{x\to\infty}(\sqrt{x^2-x}-x)$;	2) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{3x^2-5x+4}{x^2+2x+3}$; 4) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x^4-x^3+i}{x^3+2x^2+x}$; 6) $\lim\limits_{x\to\infty}(\sqrt{x^2+5x}-x)$.
2	1) $\lim\limits_{x\to\pi}\frac{\sin^2 x}{1+\cos x}$; 3) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\operatorname{tg} x}{\sqrt{1-\operatorname{tg} x}-1}$; 5) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin^3 3x}{x^3}$;	2) $\lim\limits_{x\to(\pi/4)}\frac{\sin x-\cos x}{\operatorname{tg} x-1}$; 4) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{3x}{\sin 2x}$; 6) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin^3 x}{x^4}$.

ПРАКТИЧЕСКОЕ ЗАНЯТИЕ №3

1.Тема:Непрерывность функции.

2.Количество часов: 2

3. Цель работы: научиться исследовать функцию на непрерывность в точке.

4.Необходимые знания для выполнения задания:

Если односторонние пределы конечны и равны: $\lim\limits_{x\to k-0} f(x) = \lim\limits_{x\to k+0} f(x) = m$, то существует ОБЩИЙ предел $\lim\limits_{x\to k} f(x) = m$.

<u>**Определение**</u>: функция непрерывна в точке k, если предел функции в данной точке равен значению функции в этой точке: $\lim\limits_{x\to k} f(x) = f(k)$.

<u>***Определение детализируется в следующих условиях:***</u>

1) Функция должна быть определена в точке k, то есть должно существовать значение $f(k)$.

2) Должен существовать общий предел функции $\lim\limits_{x\to k} f(x)$. Как отмечалось выше, это подразумевает существование и равенство односторонних пределов: $\lim\limits_{x\to k-0} f(x) = \lim\limits_{x\to k+0} f(x)$.

3) Предел функции в данной точке должен быть равен значению функции в этой точке: $\lim\limits_{x\to k} f(x) = f(k)$.

Если нарушено **хотя бы одно** из трёх условий, то функция теряет свойство непрерывности в точке k.

Непрерывность функции на интервале: функция непрерывна на интервале $(a;b)$, если она непрерывна в каждой точке данного интервала.

Классификация точек разрыва

1. Если в точке k нарушено условие непрерывности **и односторонние пределы <u>конечны</u>**, то она называется **точкой разрыва первого рода**.

2. **Точкой разрыва второго рода(бесконечный разрыв)** – когда левосторонний или правосторонний, а чаще, оба предела бесконечны.

5. Задание для практической работы:

Задана функция y=f(x). Установить, является ли данная функция непрерывной. В случае разрыва функции в некоторой точке найти ее пределы слева и справа, классифицировать характер разрыва. Построить схематично график функции.	
1	$f(x)=\{-x, x\le 0, \{-(x-1)^2, 0<x<2,$
2	$f(x)=\{\cos x, x\le 0, \{x^2+1, 0<x<1,$
3	$f(x)=\{-(x+1), x\le -1, \{(x+1)^2, -1<x\le 0,$
4	$f(x)=\{-x^2, x\le 0, \{\operatorname{tg} x, 0<x\le \frac{\pi}{4},$
5	$f(x)=\{-2x, x\le 0, \{x^2+1, 0<x\le 1,$
6	$f(x)=\{-2x, x\le 0, \{\sqrt{x}, 0<x<4,$

ПРАКТИЧЕСКОЕ ЗАНЯТИЕ №4

1.Тема:Вычисление производной и исследование функции.

2.Количество часов: 2

3. Цель работы: научиться вычислять производную сложной функции, исследовать функцию с помощью производной.

4.Необходимые знания для выполнения задания:

Если y является дифференцируемой функцией от u, а u является дифференцируемой функцией от x, то производная y по x равна произведению производной функции y по u на производную функции u по x.

$$f(\varphi(x))' = f'(\varphi(x))\varphi'(x).$$

Формулы дифференцирования

$$(u^n)' = nu^{n-1}u' \qquad (\lg u)' = \frac{0,4343}{u}u'$$

$$\left(\frac{1}{u}\right)' = -\frac{1}{u^2}\cdot u' \qquad (\log_a u)' = \frac{1}{u \ln a}\cdot u'$$

$$(\sqrt{u})' = \frac{1}{2\sqrt{u}}\cdot u' \qquad (a^u)' = a^u \ln a \cdot u'$$

$$(\ln u)' = \frac{1}{u}\cdot u' \qquad (e^u)' = e^u \cdot u'$$

Производные тригонометрических функций

$$(\sin u)' = \cos u \cdot u' \qquad (\cos u)' = -\sin u \cdot u'$$

$$(\operatorname{tg} u)' = \frac{1}{\cos^2 u}\cdot u' \qquad (\operatorname{ctg} u)' = -\frac{1}{\sin^2 u}\cdot u'$$

Исследование функции на максимум и минимум с помощью первой производной:

I. Найти производную $f'(x)$ функции $f(x)$.

II. Найти критические точки функции $y = f(x)$, т. е. точки, в которых $f'(x)$ обращается в нуль или терпит разрыв.

III. Исследовать знак производной $f'(x)$ в промежутках, на которые найденные критические точки делят область определения функции $f(x)$. При этом критическая точка $x = x_0$ есть точка минимума, если производная меняет знак при переходе через $x = x_0$. Если же в соседних промежутках, разделенных критической точкой $x = x_0$, знак производной не меняется, то в точке $x = x_0$ функция не имеет ни максимума, ни минимума.

IV. Вычислить значения функции в точках максимума и минимума.

Наибольшее и наименьшее значения функции:

I. Найти критические точки, принадлежащие заданному промежутку, и вычислить значения функции в этих точках.

II. Найти значения функции на концах промежутка.

III. Сравнить полученные значения: минимальное и максимальное из них являются соответственно минимумом и максимумом функции в рассматриваемом промежутке.

5. Задание для практической работы:

Вычислить значение производной при данном значении аргумента.	
1	1) $f(x) = (x^2 + 2x - 1)^4$, $x = -1$; 2) $f(x) = (x^3 - 4x^2 + 3)^7$, $x = 1$; 3) $f(x) = (3x - 1)^4$, $x = 1$.
2	1) $f(x) = \sqrt{4 - x^2}$, $x = \sqrt{3}$; 2) $f(x) = \sqrt{x^3 + 1}$, $x = 2$; 3) $f(x) = \sqrt{x^2 - 2x}$, $x = 3$.
3	1) $f(x) = \frac{6\sqrt{x^2 + 1}}{x}$, $x = 2\sqrt{2}$; 2) $f(x) = \frac{\sqrt{x^2 - 1}}{x}$, $x = \sqrt{5}$; 3) $f(x) = \frac{2x + 1}{\sqrt{x^2 + 1}}$, $x = \sqrt{3}$.
4	1) $f(x) = \sin^2 2x$, $x = \pi/16$; 2) $f(x) = \cos^2 2x$, $x = \pi/16$; 3) $f(x) = \mathrm{tg}^2\, 3x$, $x = \pi/12$; 4) $f(x) = \mathrm{tg}^2\, x \sin x$, $x = \pi/3$; 5) $f(x) = 8\sin^2 x \cos x$, $x = \pi/4$;
Исследовать функции на промежутки монотонности и точки экстремума.	
5	1) $y = x^2 - 6x + 5$; 2) $y = 2x^2 - 4x + 5$; 3) $y = -x^2 + 4x + 1$; 4) $y = x^3 - 3x^2 + 1$; 5) $y = -\frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^2 + 2$; 6) $y = -2x^3 + 15x^2 - 36x + 20$; 7) $y = x^4 - 4x + 4$; 8) $y = -\frac{1}{4}x^4 - x - 1$; 9) $y = \frac{1}{2x}$; 10) $f(x) = \frac{1}{3x - 2}$;
Найти наибольшее и наименьшее значения функции.	

6	1) $y = x^2 - 6x + 3,\quad x \in [0; 5];$ 2) $y = x^2 - 8x + 4,\quad x \in [-2; 2];$ 3) $y = x - \frac{1}{4}x^2,\quad x \in [-2; 4];$ 4) $y = x^2 - 6x + 13,\quad x \in [0; 6];$ 5) $y = \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{3}x^3,\quad x \in [1; 3];$ 6) $y = -x^3 + 9x^2 - 24x + 10,\quad x \in [0; 3].$

ПРАКТИЧЕСКОЕ ЗАНЯТИЕ №5

1.Тема:Дифференциал функции. Частные производные.

2.Количество часов: 2

3. Цель работы: научиться вычислять дифференциал функции, применять дифференциал функции к приближенному вычислению, вычислять частные производные.

4.Необходимые знания для выполнения задания:

Дифференциал функции одной переменной записывается в следующем виде:

$dy = y'dx$ или $df(x) = f'(x)dx$

Формула вычисления приближенного значения с помощью дифференциала:

$$f(x_0 + \Delta x) \approx f(x_0) + d\left[f(x_0)\right]$$

5. Задание для практической работы:

Найти дифференциал функции.		
1	1) $y = (1 - x)^5;$	2) $y = \sqrt{4 - 2x^2};$
	3) $y = \frac{1}{\sqrt{2x - 1}};$	4) $y = \ln\cos^2 x;$
	5) $y = \ln \operatorname{tg} 2x;$	6) $y = 2^{3x};$
	7) $y = e^x \sin x;$	8) $y = 1 + e^{-x}.$
Вычислить приближенное значение функции.		

2	1) $f(x) = 2x^2 - x + 1$ при $x = 2{,}01$; 2) $f(x) = x^2 + 3x + 1$ при $x = 3{,}02$; 3) $f(x) = \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^2 - 2x + 4$ при $x = 1{,}1$; 4) $f(x) = x^3 + x^2 + x + 1$ при $x = 0{,}001$; 5) $f(x) = x^4 - 1$ при $x = -3{,}3$; 6) $f(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2 + 3}}$ при $x = 1{,}1$; 7) $f(x) = x^3 - x^2 + x - 3$ при $x = 3{,}03$; 8) $f(x) = 3x^3 - x^2 + 5x - 1$ при $x = 3{,}02$.

ПРАКТИЧЕСКОЕ ЗАНЯТИЕ №6

1.Тема:Вычисление неопределенных интегралов.

2.Количество часов: 2

3. Цель работы:научиться вычислять неопределенный интеграл.

4.Необходимые знания для выполнения задания:

ТАБЛИЦА НЕОПРЕДЕЛЕННЫХ ИНТЕГРАЛОВ

I. $\int dx = x.$

II. $\int (a + bx)^n\, dx = \frac{(a + bx)^{n+1}}{b(n + 1)}$, $(n \neq -1)$.

III. $\int x^n\, dx = \frac{x^{n+1}}{n + 1}$, $(n \neq -1)$.

IV. $\int \frac{dx}{a + bx} = \frac{1}{b} \ln |a + bx|.$

V. $\int \frac{dx}{x} = \ln |x|.$

VI. $\int \frac{dx}{1 + x^2} = \operatorname{arctg} x.$

VII. $\int \sqrt{a + bx}\, dx = \frac{2}{3b}(\sqrt{a + bx})^3.$

VIII. $\int \frac{dx}{\sqrt{1 - x^2}} = \arcsin x.$

IX. $\int e^x\, dx = e^x.$

X. $\int \ln x\, dx = x \ln x - x.$

XI. $\int a^x\, dx = \frac{a^x}{\ln a}.$

XII. $\int \cos x\, dx = \sin x.$

XIII. $\int \sin x\, dx = -\cos x.$

XIV. $\int \frac{dx}{\cos^2 x} = \operatorname{tg} x.$

XV. $\int \frac{dx}{\sin^2 x} = -\operatorname{ctg} x.$

5. Задание для практической работы:

Вычислить интеграл.	
1	1) $\int 3x^2\, dx$; 2) $\int x^4\, dx$; 3) $\int x^{(m-1)}\, dx$; 4) $\int 4t^3\, dt$; 5) $\int \frac{dx}{x^{2}}$.
2	1) $\int (2x^2 - 1)^2\, dx$; 2) $\int x^3(1 - 6x^2)\, dx$; 3) $\int (3x^{-4} + 8x^{-5})\, dx$; 4) $\int (x^{-4} - x^{-3} - 3x^{-2} + 1)\, dx$; 5) $\int (5u^{3/2} - 7u^{3/4})\, du$.

3	. 1) $\int 5^x\,dx$; 2) $\int 4^{2x}\,dx$; 3) $\int (e^x + 2x)\,dx$; 4) $\int (3^x - e^x - 1)\,dx$; 5) $\int \frac{2dx}{x+3}$.
4	. 1) $\int (\sin x - 5)\,dx$; 2) $\int \frac{\sin 2x}{\cos x}\,dx$; 3) $\int \sin 6x\,dx$; 4) $\int (4 - 3\cos x)\,dx$; 5) $\int \cos 4x\,dx$.
5	1) $\int \frac{\cos x\,dx}{3\sin x - 1}$; 2) $\int \frac{\sin x\,dx}{2 - \cos x}$; 3) $\int \frac{\cos x\,dx}{3 + 2\sin x}$; 4) $\int \frac{dx}{\cos^2 5x}$; 5) $\int \frac{dx}{\sin^2(3x+2)}$.
6	1) $\int \frac{2\,dx}{\sqrt{1 - x^2}}$; 2) $\int \frac{du}{\sqrt{5 - u^2}}$; 3) $\int \frac{dx}{\sqrt{5 - 4x^2}}$; 4) $\int \frac{dx}{25 + x^2}$; 5) $\int \frac{dx}{2 + 3x^2}$.

ПРАКТИЧЕСКОЕ ЗАНЯТИЕ №7

1.Тема:Вычисление определенных интегралов.

2.Количество часов: 2

3. Цель работы:научиться вычислять определенный интеграл.

4.Необходимые знания для выполнения задания:

$$\boxed{\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a).}$$

Алгоритм нахождения определенного интеграла $\int_a^b f(x)\,dx$

I. Найти первообразную функцию $F(x)$ для функции $f(x)$.

II. Вычислить значение $F(x)$ при $x = b$ (b называется верхним пределом).

III. Вычислить значение $F(x)$ при $x = a$ (a называется нижним пределом).

IV. Вычислить разность $F(b) - F(a)$.

5. Задание для практической работы:

Вычислить интеграл.	
1	. 1) $\int_0^2 x^2\,dx$; 2) $\int_1^2 x^3\,dx$; 3) $\int_1^2 x^4\,dx$; 4) $\int_{-2}^3 (4x^3 - 3x^2 + 2x + 1)\,dx$; 5) $\int_{-1}^0 (x^3 + 2x)\,dx$.

2	.1) $\int\limits_{1/2}^{1} \frac{dx}{x^3}$; 2) $\int\limits_{1/3}^{1/2} \frac{dx}{x^2}$; 3) $\int\limits_{0}^{4} \sqrt{x}\, dx$; 4) $\int\limits_{1}^{8} \sqrt[3]{x^2}\, dx$; 5) $\int\limits_{8}^{27} \frac{dx}{\sqrt[3]{x}}$.
3	.1) $\int\limits_{1}^{4} \left(\sqrt{x} - \frac{1}{\sqrt{x}}\right) dx$; 2) $\int\limits_{1}^{9} \frac{x-1}{\sqrt{x}}\, dx$; 3) $\int\limits_{1}^{3} e^{2x}\, dx$; 4) $\int\limits_{0}^{1} e^{3x}\, dx$; 5) $\int\limits_{3}^{6} \frac{dx}{x}$.
4	1) $\int\limits_{0}^{\pi/3} \sin x\, dx$; 2) $\int\limits_{-\pi/4}^{\pi/4} \cos x\, dx$; 3) $\int\limits_{-\pi/2}^{\pi/2} (\cos x - \sin x)\, dx$; 4) $\int\limits_{0}^{\pi/4} \frac{4\, dx}{\cos^2 x}$; 5) $\int\limits_{\pi/6}^{\pi/3} \frac{dx}{\sin^2 x}$.

ПРАКТИЧЕСКОЕ ЗАНЯТИЕ №8

1.Тема: Действия с матрицами.

2.Количество часов: 2

3. Цель работы: сформировать умение выполнять арифметические действия с матрицами, находить определители матриц.

4.Необходимые знания для выполнения задания:

Матрицей называется прямоугольная таблица чисел, состоящая из m строк и n столбцов, которую записывают в следующем виде:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}.$$

Для обозначения матрицы используют прописные латинские буквы, для обозначения элементов матрицы – строчные латинские буквы с указанием номера строки и столбца, на пересечении которых стоит данный элемент. Запись « матрица B имеет размер mxn» означает, что речь идет о матрице, состоящей из m строк и n столбцов. Например, матрица $B = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 0 \\ 2 & 3 & 5 \end{pmatrix}$ имеет размер 2x3. Далее, b_{ij} - обозначение элемента, стоящего на пересечении i-й строки и j-го столбца данной матрицы (в примере $b_{23}=5$).

При ссылке на i-ю строку матрицы A используют обозначение A_i, при ссылке на j-й столбец – обозначение A^j.

Матрица, у которой число строк совпадает с числом столбцов, называется *квадратной*. Элементы a_{11} , a_{22} ,…, a_{nn} квадратной матрицы A (размера nxn) образуют *главную диагональ*. Квадратная матрица, у которой отличные от нуля элементы могут стоять только на главной диагонали, называется *диагональной.* Диагональная матрица, у которой все элементы (главной диагонали!) равны 1, называется *единичной.* Наконец, квадратная матрица, у которой ниже (выше) главной диагонали находятся только нули, называется *верхней (нижней) треугольной матрицей*. Например, среди квадратных матриц размера 3x3

$$A=\begin{pmatrix}-2 & 3 & 1\\ 0 & 3 & 3\\ 0 & 0 & -2\end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix}-2 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix},\ E=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix},\ C=\begin{pmatrix}2 & 0 & 0\\ 1 & 0 & 0\\ 3 & -4 & -2\end{pmatrix}$$

матрица A является верхней треугольной, B – диагональной, C – нижней треугольной, E – единичной.

Матрицы A, B называются *равными* ($A=B$), если они имеют одинаковый размер, и их элементы, стоящие на одинаковых позициях, совпадают.

Арифметические действия с матрицами.

Чтобы *умножить матрицу A на отличное от нуля вещественное число k,* необходимо каждый элемент матрицы умножить на это число:

$$kA=k\begin{pmatrix}a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n}\\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n}\\ \dots & \dots & \dots & \dots\\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}ka_{11} & ka_{12} & \dots & ka_{1n}\\ ka_{21} & ka_{22} & \dots & ka_{2n}\\ \dots & \dots & \dots & \dots\\ ka_{m1} & ka_{m2} & \dots & ka_{mn}\end{pmatrix}.$$

Чтобы найти *сумму матриц A, B* одной размерности, необходимо сложить элементы с одинаковыми индексами (стоящие на одинаковых местах):

$$A+B=\begin{pmatrix}a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n}\\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n}\\ \dots & \dots & \dots & \dots\\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn}\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1n}\\ b_{21} & b_{22} & \dots & b_{2n}\\ \dots & \dots & \dots & \dots\\ b_{m1} & b_{m2} & \dots & b_{mn}\end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix}a_{11}+b_{11} & a_{12}+b_{12} & \dots & a_{1n}+b_{1n}\\ a_{21}+b_{21} & a_{22}+b_{22} & \dots & a_{2n}+b_{2n}\\ \dots & \dots & \dots & \dots\\ a_{m1}+b_{m1} & a_{m2}+b_{m2} & \dots & a_{mn}+b_{mn}\end{pmatrix}.$$

Пример 1. Найти $2A$-B, если $A=\begin{pmatrix}4 & -1\\ 2 & 3\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}1 & 0\\ -3 & 2\end{pmatrix}$.

Решение. Сначала умножаем матрицу A на число «2», затем матрицу B на число «-1», и, наконец, находим сумму полученных матриц:

$$2A-B=2\begin{pmatrix}4 & -1\\ 2 & 3\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}1 & 0\\ -3 & 2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}8 & -2\\ 4 & 6\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}-1 & 0\\ 3 & -2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}7 & -2\\ 7 & 4\end{pmatrix}$$

Имеем: $\begin{vmatrix}2 & -3 & -1\\ 4 & -1 & 2\\ 3 & 5 & 0\end{vmatrix}=2\begin{vmatrix}-1 & 2\\ 5 & 0\end{vmatrix}-(-3)\begin{vmatrix}4 & 2\\ 3 & 0\end{vmatrix}+(-1)\begin{vmatrix}4 & -1\\ 3 & 5\end{vmatrix}=$

$$=2(-1\cdot 0-2\cdot 5)+3(4\cdot 0-2\cdot 3)-1(4\cdot 5-(-1)\cdot 3)=-20-18-23=-61.$$

Произведение АВ можно определить только для матриц *А* размера *mxn* и *В* размера *nxp*, при этом *АВ=С*, матрица *С* имеет размер *mxp,* и ее элемент c_{ij} находится как скалярное произведение *i-й* строки матрицы *А* на *j-й* столбец матрицы *В:* $c_{ij} = A_i B^j = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \ldots + a_{in}b_{nj}$ *(i=1,2,…,m; j=1,2,…,p).* Фактически необходимо каждую строку матрицы *А* (стоящей слева) умножить скалярно на каждый столбец матрицы *В* (стоящей справа).

Пример 2. Найти произведение матриц $A = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 4 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ и $B = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$.

Решение. Размер матрицы *А* 3x2, матрицы *В* 2x2. Поэтому произведение *АВ* найти можно, произведение *ВА* – нет. Действуя по сформулированному выше правилу, получаем:

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 4 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (-1;1)(1,3) & (-1;1)(-2;4) \\ (0;4)(1;3) & (0,4)(-2;4) \\ (2;1)(1;3) & (2;1)(-2;4) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1+3 & 2+4 \\ 0+12 & 0+16 \\ 2+3 & -4+4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 6 \\ 12 & 16 \\ 5 & 0 \end{pmatrix}$$

Матрицей, *транспонированной* к матрице *А* размера *mxn,* называется матрица A^T размера *nxm,* строки которой являются столбцами исходной матрицы.

Например, если $C = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 1 \\ 1 & -3 & 3 \end{pmatrix}$, то $C^T = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 0 & -3 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$.

Пример 3. Найти $\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 4 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} + 2 \begin{pmatrix} -2 & 4 & 6 \\ 5 & 7 & 3 \end{pmatrix}^T$.

Решение. Воспользовавшись вычислениями, проведенными при решении примера, а также правилами умножения матрицы на число и сложения матриц, получим:

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 4 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} + 2 \begin{pmatrix} -2 & 4 & 6 \\ 5 & 7 & 3 \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} 2 & 6 \\ 12 & 16 \\ 5 & 0 \end{pmatrix} + 2 \begin{pmatrix} -2 & 5 \\ 4 & 7 \\ 6 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 16 \\ 20 & 30 \\ 17 & 6 \end{pmatrix}.$$

Матрицы А, В называются *эквивалентными*, если одна получена из другой путем элементарных преобразований.

Рангом матрицы *А* в дальнейшем будем считать число строк эквивалентной ей ступенчатой матрицы, используя обозначение *r(A).* Так, в рассмотренном выше примере 3.4 *r(A)=3, r(B)=2.* Можно доказать, что ранг матрицы *А* (размера *mxn*) не может быть больше $\min\{m,n\}$ (например, для матрицы *А* размера *2x3* $r(A) \le 2$). Кроме того, ранг матрицы не зависит ни от выбора ведущих элементов, ни от проводимых преобразований. Это свойство можно использовать при проверке. Так, в примере 3.4 после перестановки первой и второй строки в матрице *В* можно в качестве ведущего сначала рассмотреть элемент b_{12}, а затем вычеркнуть третью строку, пропорциональную второй ($C_3 = -C_2$):

$$B = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 4 & 9 \\ 1 & 3 & 2 & 5 \\ 1 & 9 & 2 & 6 \end{pmatrix} \xrightarrow{C_1 \leftrightarrow C_2} \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 & 5 \\ 2 & 0 & 4 & 9 \\ 1 & 9 & 2 & 6 \end{pmatrix} \to$$

$$\xrightarrow{C_3 = C_3 - 3C_1} \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 & 5 \\ 2 & 0 & 4 & 9 \\ -2 & 0 & -4 & -9 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 & 5 \\ 2 & 0 & 4 & 9 \end{pmatrix}$$

Вычисление определителей. Определитель матрицы *А* размера *2x2* (определитель 2-го порядка) – это число, которое можно найти по правилу:

$$\det A = |A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$$

(произведение элементов, стоящих на главной диагонали матрицы, минус произведение элементов, стоящих на побочной диагонали).

Определитель матрицы *A* размера *3*х*3* (определитель 3-го порядка) – число, вычисляемое по правилу *«раскрытие определителя по первой строке»:*

$$\det A = |A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$$

Пример 4. Найти: $\begin{vmatrix} 2 & -3 & -1 \\ 4 & -1 & 2 \\ 3 & 5 & 0 \end{vmatrix}$

Решение. При нахождении определителя воспользуемся сначала формулой $\det A = |A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$, а затем (для вычисления определителей 2-го порядка) формулой $\det A = |A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$.

5. Задание для практической работы:

Задание 1. Выполнить арифметические действия с матрицами:

1) $3\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 5 \end{pmatrix} - 2\begin{pmatrix} 1 & -4 \\ 5 & 0 \end{pmatrix}$;

2) $\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 3 & -4 \end{pmatrix}^T + 2\begin{pmatrix} 5 & -1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$;

3) $\begin{pmatrix} 3 & -4 & 5 \\ -8 & 10 & 4 \end{pmatrix}^T - 3\begin{pmatrix} -5 & -1 \\ 8 & 4 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$;

4) $\begin{pmatrix} 2 & 0 & 8 \\ 3 & 8 & 5 \\ 0 & -4 & 7 \end{pmatrix} + 2\begin{pmatrix} 2 & 10 & 3 \\ 0 & 4 & -2 \\ 5 & 2 & -9 \end{pmatrix}^T$;

5) $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -3 & 14 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 5 & 10 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -2 & 4 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$;

6) $\begin{pmatrix} -3 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & -1 & -3 & 2 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \\ -1 & 3 & 1 & 10 \\ 2 & 4 & 8 & -1 \end{pmatrix} - 3\begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix}^T$;

7) $\begin{pmatrix} 3 & -4 & 5 \\ 5 & 6 & -2 \end{pmatrix}^T - \begin{pmatrix} -5 & 6 \\ 2 & -3 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 7 & 2 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$

Задание 2. Доказать равенство *(AB)C=A(BC)* для матриц:

1) $A = \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ 1 & -3 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 6 & -1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ -2 & 5 \end{pmatrix}$;

2) $A = \begin{pmatrix} -3 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 3 & 1 & 4 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -3 & 1 & 4 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & 4 \\ -1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$;

3) $A=\begin{pmatrix} -3 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 3 & 1 & 4 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & -1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$, $C=\begin{pmatrix} -2 & 4 & -1 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$;

Задание 3. Найти: 1) $\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}^2$; 2) $\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}^3$; 3) $\begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}^3$.

Задание 4. Вычислить определители:

1) $\begin{vmatrix} \sin\alpha & -\cos\alpha \\ \cos\alpha & \sin\alpha \end{vmatrix}$; 2) $\begin{vmatrix} -1 & i \\ i & -1 \end{vmatrix}$; 3) $\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{vmatrix}$

4) $\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 6 \end{vmatrix}$; 5) $\begin{vmatrix} 3 & -2 \\ 4 & -10 \end{vmatrix}$; 6) $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 5 \\ 0 & 4 & 7 \\ -3 & 1 & 5 \end{vmatrix}$

7) $\begin{vmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 0 & -2 & 3 \\ 1 & 1 & -1 \end{vmatrix}$;

ПРАКТИЧЕСКОЕ ЗАНЯТИЕ №9

1.Тема: Нахождение обратной матрицы.

2.Количество часов: 2

3. Цель работы: научиться вычислять обратную матрицу.

4.Необходимые знания для выполнения задания:

ОПРЕДЕЛЕНИЕ

Обратной матрицей, к квадратной матрице , называется такая матрица $\boxed{\phantom{A^{-1}}}$ для которой справедливо равенство

$$A \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot A = E$$

ТЕОРЕМА

Для существования обратной матрицы A^{-1} необходимо и достаточно, чтобы матрица A была невырожденной, то есть, чтобы $\det A \neq 0$. Пусть задана квадратная матрица

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix},$$

тогда обратную к ней матрицу A^{-1} можно вычислить по формуле

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & \dots & A_{1n} \\ A_{21} & A_{22} & \dots & A_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ A_{n1} & A_{n2} & \dots & A_{nn} \end{pmatrix}^T = \frac{1}{\det A} \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \dots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \dots & A_{n2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ A_{1n} & A_{n2} & \dots & A_{nn} \end{pmatrix}$$

где $A_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}$ – алгебраическое дополнение к элементу a_{ij}.

ПРИМЕР 1

Найти обратную матрицу для матрицы A

Задание

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 7 \\ 1 & -5 & 2 \\ 3 & -1 & 9 \end{pmatrix}$$

Проверим, является ли заданная матрица невырожденной. Для этого вычислим определитель этой матрицы

$$\det A = \begin{vmatrix} 2 & 3 & 7 \\ 1 & -5 & 2 \\ 3 & -1 & 9 \end{vmatrix} = -90 + 18 - 7 + 105 - 27 + 4 = 3 \neq 0$$

Определитель матрицы не равен нулю, значит, матрица A не вырожденная и для неё существует обратная матрица A^{-1}.

Вычислим алгебраические дополнения A_{ij} соответствующих элементов матрицы A:

Решение

$$A_{11} = (-1)^{1+1} \cdot \begin{vmatrix} -5 & 2 \\ -1 & 9 \end{vmatrix} = -45+2 = -43; \qquad A_{12} = (-1)^{1+2} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 9 \end{vmatrix} = -(9-6) = -3$$

$$A_{13} = (-1)^{1+3} \cdot \begin{vmatrix} 1 & -5 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} = -1+15 = 14; \qquad A_{21} = (-1)^{2+1} \cdot \begin{vmatrix} 3 & 7 \\ -1 & 9 \end{vmatrix} = -(27+7) = -34$$

$$A_{22} = (-1)^{2+2} \cdot \begin{vmatrix} 2 & 7 \\ 3 & 9 \end{vmatrix} = 18-21 = -3; \qquad A_{23} = (-1)^{2+3} \cdot \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} = -(-2-9) = 11$$

$$A_{31} = (-1)^{3+1} \cdot \begin{vmatrix} 3 & 7 \\ -5 & 2 \end{vmatrix} = 6+35 = 41; \qquad A_{32} = (-1)^{3+2} \cdot \begin{vmatrix} 2 & 7 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = -(4-7) = 3$$

$$A_{33} = (-1)^{3+3} \cdot \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & -5 \end{vmatrix} = -10 - 3 = -13$$

Запишем матрицу A^*, составленную из алгебраических дополнений элементов матрицы A

$$A^* = \begin{pmatrix} -43 & -3 & 14 \\ -34 & -3 & 11 \\ 41 & 3 & -13 \end{pmatrix}$$

Далее запишем обратную матрицу согласно формуле $A^{-1} = \frac{1}{\det A} \cdot (A^*)^T$, получим

$$A^{-1} = \frac{1}{3} \cdot \begin{pmatrix} -43 & -34 & 41 \\ -3 & -3 & 3 \\ 14 & 11 & -13 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{-43}{3} & \frac{-34}{3} & \frac{41}{3} \\ -1 & -1 & 1 \\ \frac{14}{3} & \frac{11}{3} & \frac{-13}{3} \end{pmatrix}$$

Ответ $A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{-43}{3} & \frac{-34}{3} & \frac{41}{3} \\ -1 & -1 & 1 \\ \frac{14}{3} & \frac{11}{3} & \frac{-13}{3} \end{pmatrix}$

Метод Гаусса для нахождения обратной матрицы

Для нахождения обратной матрицы A^{-1} методом Гаусса необходимо:

1) построить вспомогательную матрицу M, приписав к столбцам матрицы A справа столбцы единичной матрицы того же порядка, что и матрица A:

$$M = \left(\begin{array}{cccc|cccc} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & 1 & 0 & \dots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} & 0 & 0 & \dots & 1 \end{array}\right)$$

2) элементарными преобразованиями строк привести матрицу M к матрице, в левой части которой стоит единичная матрица:

$$N = \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & \dots & 0 & b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1n} \\ 0 & 1 & \dots & 0 & b_{21} & b_{22} & \dots & b_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & b_{n1} & b_{n2} & \dots & b_{nn} \end{array}\right)$$

3) матрица, стоящая в правой части полученной матрицы N и будет обратной матрицей

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \dots & b_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ b_{n1} & b_{n2} & \dots & b_{nn} \end{pmatrix}$$

ПРИМЕР 2

Найти обратную матрицу к матрице A методом Гаусса.

Задание

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 7 \\ 1 & -5 & 2 \\ 3 & -1 & 9 \end{pmatrix}$$

Запишем вспомогательную матрицу

$$M = \left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 3 & 7 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -5 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & -1 & 9 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

и приведем её, с помощью элементарных преобразований, к матрице, в которой единичная матрица будет слева. Переставим местами первую и вторую строки

$$M = \left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 3 & 7 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -5 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & -1 & 9 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -5 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 7 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & -1 & 9 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

Прибавим ко второй строке первую строку, умноженную на (-2), а к третьей строке первую, умноженную на (-3)

Решение

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -5 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 7 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & -1 & 9 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -5 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 13 & 3 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 14 & 3 & 0 & -3 & 1 \end{array}\right)$$

Прибавим ко второй строке третью, умноженную на (-1)

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -5 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 13 & 3 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 14 & 3 & 0 & -3 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -5 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 14 & 3 & 0 & -3 & 1 \end{array}\right)$$

Умножим вторую строку на (-1)

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -5 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 14 & 3 & 0 & -3 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -5 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & -1 & 1 \\ 0 & 14 & 3 & 0 & -3 & 1 \end{array}\right)$$

Прибавим к первой строке вторую, умноженную на 5, а к третьей вторую, умноженную на (-14)

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -5 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & -1 & 1 \\ 0 & 14 & 3 & 0 & -3 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 2 & -5 & -4 & 5 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 3 & 14 & 11 & -13 \end{array}\right)$$

Разделим третью строку на 3

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 2 & -5 & -4 & 5 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 3 & 14 & 11 & -13 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 2 & -5 & -4 & 5 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{14}{3} & \frac{11}{3} & \frac{-13}{3} \end{array}\right)$$

К первой строке прибавим третью, умноженную на (-2)

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 2 & -5 & -4 & 5 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{14}{3} & \frac{11}{3} & \frac{-13}{3} \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & \frac{-43}{3} & -\frac{34}{3} & \frac{41}{3} \\ 0 & 1 & 0 & -1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{14}{3} & \frac{11}{3} & \frac{-13}{3} \end{array}\right)$$

Тогда обратная матрица равна $A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{-43}{3} & -\frac{34}{3} & \frac{41}{3} \\ -1 & -1 & 1 \\ \frac{14}{3} & \frac{11}{3} & \frac{-13}{3} \end{pmatrix}$.

Ответ $A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{-43}{3} & \frac{-34}{3} & \frac{41}{3} \\ -1 & -1 & 1 \\ \frac{14}{3} & \frac{11}{3} & \frac{-13}{3} \end{pmatrix}$

5. Задание для практической работы:

1. Найти обратную матрицу для матриц:

а) $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 0 & 4 & -1 \\ 5 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. б) B=$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 3 & 0 & 2 \\ 4 & -2 & 5 \end{pmatrix}$ c) C=$\begin{pmatrix} 2 & 4 & 3 \\ 3 & 2 & 5 \\ 5 & 6 & 8 \end{pmatrix}$

2. Найти обратную матрицу для матриц:

а) $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ б) $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$.

ПРАКТИЧЕСКОЕ ЗАНЯТИЕ №10

1.Тема: Решение систем линейных уравнений методами линейной алгебры.

2.Количество часов: 2

3. Цель работы: научиться решать системы линейных уравнений методами линейной алгебры.

4.Необходимые знания для выполнения задания:

Рассмотрим системы линейных алгебраических уравнений (СЛАУ) произвольной размерности, состоящие из m уравнений с n неизвестными:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}. \qquad (*)$$

Матрица $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} \end{pmatrix}$, составленная из коэффициентов системы (*), называется матрицей системы (ее размер – mxn), а вектор $B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \ldots \\ b_m \end{pmatrix}$ (m-мерный)-столбцом (вектором) свободных членов. Матрицу вида $(A|B) = \left(\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} & b_2 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} & b_m \end{array}\right)$ называют расширенной матрицей системы (*). Любой набор значений неизвестных $x_1, x_2, \ldots, x_n$, образующих n-мерный вектор $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \ldots \\ x_n \end{pmatrix} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)^T$, является решением системы (*), если эти числа удовлетворяют всем уравнениям системы (т.е. превращают их в тождества). Очевидно, что $b_i = a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \ldots + a_{in}x_n$ при каждом $i=1,2,\ldots,m$ (i-*е* уравнение представляет собой скалярное произведение i-*й* строки матрицы системы на вектор X), и (*) можно переписать в виде

$$AX = B. \qquad (**)$$

Запись (**) называется "матричной (векторной) формой записи" системы (*).

Пример 1. Выписать матрицу коэффициентов и столбец свободных членов для СЛАУ $\begin{cases} 2x_1 - x_2 + x_3 - 7x_4 = 5 \\ 6x_1 - 3x_2 + 2x_3 - 4x_4 = 7 \\ 4x_1 - x_2 + x_3 + 3x_4 = 10 \end{cases}$.

Решение. Очевидно, что $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 & -7 \\ 6 & -3 & 2 & -4 \\ 4 & -1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$; $B = \begin{pmatrix} 5 \\ 7 \\ 10 \end{pmatrix}$.

Пример 2. Записать СЛАУ, если $A = \begin{pmatrix} 3 & 4 & -2 & 0 \\ 1 & 7 & 0 & 8 \\ 0 & -2 & 3 & 5 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 2 \\ -4 \\ 8 \end{pmatrix}$.

Решение. Введем в рассмотрение вектор X и с каждым столбцом мысленно сопоставим неизвестное: с первым столбцом - x_1, со вторым - x_2, с третьим - x_3, с четвертым - x_4. Окончательно нужная система линейных алгебраических уравнений имеет вид

$$\begin{cases} 3x_1 + 4x_2 - 2x_3 = 2 \\ x_1 + 7x_2 + 8x_4 = -4 \\ -2x_2 + 3x_3 + 5x_4 = 8 \end{cases}.$$

5. Задание для практической работы:

Задание 1. По расширенной матрице выписать СЛАУ.

1) $(A|B)=\left(\begin{array}{cccc|c} 8 & -2 & 5 & 6 & -4 \\ 2 & 0 & 4 & 1 & 15 \end{array}\right)$

2) $(A|B)=\left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 3 & -4 & 1 \\ 12 & 0 & 1 & 11 \\ 5 & 4 & 10 & -3 \end{array}\right)$

3) $(A|B)=\left(\begin{array}{ccccc|c} 2 & 3 & -1 & 10 & 7 & 12 \\ 1 & 3 & -1 & 3 & 4 & -3 \\ -7 & 4 & 0 & 0 & -1 & 0 \end{array}\right)$

4) $(A|B)=\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -2 & -3 & 4 & 5 \\ 2 & -1 & 4 & 7 & -1 \\ 0 & 8 & 6 & 8 & 6 \end{array}\right)$

Задание 2. Решить системы уравнений методом Крамера и методом Гаусса.

1) $\begin{cases} 2x_1 - x_2 + x_3 = 2 \\ 3x_1 + 2x_2 + 2x_3 = -2 \\ x_1 - 2x_2 + x_3 = 1 \end{cases}$

2) $\begin{cases} 3x_1 + x_2 + 3x_3 = 2 \\ 5x_1 - 2x_2 + 2x_3 = 1 \\ 2x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 1 \end{cases}$

3) $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 5 \\ 2x_1 + x_2 + x_3 = 1 \\ x_1 + 3x_2 + 4x_3 = 1 \end{cases}$

4) $\begin{cases} x_1 - x_2 + 3x_3 = 9 \\ -2x_1 + 3x_2 - 4x_3 = -16 \\ x_1 + 6x_3 = 13 \end{cases}$

ПРАКТИЧЕСКОЕ ЗАНЯТИЕ №11

1.Тема: Решение СЛАУ различными методами.

2.Количество часов: 2

3. Цель работы: научиться решать системы линейных уравнений методами линейной алгебры

4.Необходимые знания для выполнения задания:

Классификация систем линейных алгебраических уравнений. Определения и основные теоремы. Если СЛАУ (*) имеет хотя бы одно решение, она называется *совместной* (соответственно, система *несовместная*, если она вообще не имеет решений). Совместная система (*) называется *определенной,* если она имеет единственное решение, и *неопределенной*, если имеет более одного решения (в последнем случае у нее бесконечно много решений).

Матрицу системы (*) будем называть *приведенной* (а саму систему *канонической*), если в каждой *i-й* строке *(i=1,2,...,m)* есть элемент $a_{ij}=1$, а все остальные элементы *j-го* столбца равны нулю. Такие элементы (и соответствующие им неизвестные) будем называть *ведущими,* а оставшиеся неизвестные назовем *свободными*.

Теорема 1 (Кронекера-Капелли). СЛАУ (*) совместна тогда и только тогда, когда ранг матрицы системы совпадает с рангом ее расширенной матрицы, т.е выполняется равенство $r(A)=r(A|B)$.

Для совместной системы число $r=r(A)=r(A|B)$ назовем рангом системы.

Теорема 2 (о количестве решений). Пусть СЛАУ (*) совместна. Если ее ранг равен числу неизвестных ($r=n$), то система является определенной; если ранг системы меньше числа неизвестных ($r<n$), то исходная система – неопределенная.

Неопределенная система, как было отмечено, имеет бесконечное множество решений. Совокупность всех решений называется *общим решением системы.*

Алгоритм метода Гаусса. Цель рассуждений – путем элементарных преобразований свести исходную систему к равносильной, решение которой можно выписать непосредственно. Основными шагами метода Гаусса являются следующие.

I. *Прямой ход.* Выписать расширенную матрицу системы, путем элементарных преобразований свести ее к эквивалентной ступенчатой и определить ранги матрицы и расширенной матрицы системы. Если они различны, то исходная система несовместна, т.е. не имеет решений. Если $r(A)=r(A|B)$, то переходим к следующему этапу.

II. Сравнить ранг системы и число неизвестных, сделать вывод о количестве решений, учитывая теорему 2.

III. *Обратный ход*. Ступенчатую матрицу преобразовать к эквивалентной ей приведенной. Определить, какие неизвестные являются ведущими, какие – свободными.

IV. Выписать по полученной матрице систему, записать ответ (выразив, в случае неопределенной системы, ведущие элементы через свободные для построения общего решения).

Пример 3. Решить СЛАУ $\begin{cases} 2x_1 - x_2 - x_3 = 4 \\ 3x_1 + 4x_2 - 2x_3 = 11 \\ 3x_1 - 2x_2 + 4x_3 = 11 \end{cases}$.

Решение. Преобразуем расширенную матрицу системы:

$$(A|B) = \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & -1 & 4 \\ 3 & 4 & -2 & 11 \\ 3 & -2 & 4 & 11 \end{array}\right) \xrightarrow[C_3 = C_3 - 2C_1]{C_2 = C_2 + 4C_1} \left(\begin{array}{c} 2 \\ 11 \\ -1 \end{array}\right.$$

$$\xrightarrow{C_3 = C_3 + C_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & -1 & 4 \\ 11 & 0 & -6 & 27 \\ 10 & 0 & 0 & 30 \end{array}\right) \xrightarrow{C_3 = C_3 / 10} \left(\begin{array}{c} 2 \\ 1 \\ 1 \end{array}\right.$$

Последняя матрица – ступенчатая. Ведущими неизвестными для нее являются x_2 в первой строке, x_3 во второй и x_1 в третьей. Очевидно, что система совместна и ее ранг равен 3: $r(A|B) = r(A) = 3 = r$. Поскольку число неизвестных также равно 3, исходная система является определенной.

Переходим к проведению преобразований по обратному методу Гаусса (теперь необходимо получать нули НАД ведущими элементами).

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & -1 & 4 \\ 11 & 0 & -6 & 27 \\ 1 & 0 & 0 & 3 \end{array}\right) \xrightarrow[C_1 = C_1 - 2C_3]{C_2 = C_2 - 11C_3} \left(\begin{array}{ccc|} 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & -6 \\ 1 & 0 & 0 \end{array}\right.$$

$$\xrightarrow[C_2 = -C_2 / 6]{C_1 = C_1 - C_2 / 6} \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 3 \end{array}\right).$$

Теперь составляем по последней матрице систему $\begin{cases} -x_2 = -1 \\ x_3 = 1 \\ x_1 = 3 \end{cases}$ и выписываем значения неизвестных в порядке их номеров: $X=(3;1;1)^T$. Это и есть ответ.

Пример 4. Для СЛАУ $\begin{cases} 3x_1 + 4x_2 + x_3 + 2x_4 = 3 \\ 6x_1 + 8x_2 + 2x_3 + 5x_4 = 7 \\ 10x_1 + 12x_2 + 3x_3 + 10x_4 = 16 \end{cases}$ найти общее и два частных решения.

Решение. Приведем расширенную матрицу системы к ступенчатой.

$$(A|B) = \left(\begin{array}{cccc|c} 3 & 4 & 1 & 2 & 3 \\ 6 & 8 & 2 & 5 & 7 \\ 10 & 12 & 3 & 10 & 16 \end{array}\right) \xrightarrow[C_3 = C_3 - 3C_1]{C_2 = C_2 - 2C_1} \left(\begin{array}{cccc|c} 3 & 4 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 4 & 7 \end{array}\right) \longrightarrow$$

$$\xrightarrow{C_3 \leftrightarrow C_2} \left(\begin{array}{cccc|c} 3 & 4 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & 0 & 4 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right).$$

Очевидно, что $r(A|B) = r(A) = 3 = r$, число неизвестных *n=4* и в соответствии с теоремой 6.2 исходная система является неопределенной. Ведущие неизвестные: x_3 в первой строке, x_1 во второй, x_4 в третьей. Свободное неизвестное - x_2. Обратным ходом преобразуем матрицу к приведенному виду:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 3 & 4 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & 0 & 4 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow[C_1 = C_1 - 2C_2]{C_2 = C_2 - 4C_3} \left(\begin{array}{cccc|c} 3 & 4 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{C_1 = C_1 - 3C_2} \left(\begin{array}{cccc|c} 0 & 4 & 1 & 0 & -8 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right).$$

Выписываем полученную систему и ведущие неизвестные выражаем через свободные: $\begin{cases} 4x_2 + x_3 = -8 \\ x_1 = 3 \\ x_4 = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_3 = -8 - 4x_2 \\ x_1 = 3 \\ x_4 = 1 \end{cases}$. Общее решение записываем в порядке нумерации неизвестных: $X_{об} = (3; \quad x_2; \quad -8 - 4x_2; \quad 1)^T$, x_2 - любое вещественное число.

Частное решение можно получить, если придать свободному неизвестному x_2 конкретное числовое значение. Например, при $x_2 = 0$ $X_ч = (3;0;-8;1)^T$, а при $x_2 = -1$ $X_ч = (3;-1;-4;1)^T$.

Теорема Крамера. Рассмотрим «квадратную» систему линейных уравнений (число неизвестных совпадает с числом уравнений) вида

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \ldots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{nn}x_n = b_n \end{cases}. \qquad (*)$$

Теорема 3 (теорема Крамера). Если определитель матрицы системы (*) отличен от нуля ($|A| \neq 0$), то данная система имеет единственное решение, причем значения неизвестных находятся по формулам

$$x_i = \frac{|A|_i}{|A|}, \quad i=1,2,\ldots,n$$

где $|A|_i$ - определитель матрицы, полученной из исходной матрицы системы путем замены *i-го* столбца на столбец свободных членов.

Пример 5. Решить систему $\begin{cases} 2x_1 - x_2 - x_3 = 4 \\ 3x_1 + 4x_2 - 2x_3 = 11 \\ 3x_1 - 2x_2 + 4x_3 = 11 \end{cases}$ методом Крамера.

Решение. Выписываем A - матрицу системы и B - столбец свободных членов: $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 3 & 4 & -2 \\ 3 & -2 & 4 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 4 \\ 11 \\ 11 \end{pmatrix}$. Далее вычисляем определители:

$$|A| = \begin{vmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 3 & 4 & -2 \\ 3 & -2 & 4 \end{vmatrix} = 2(16-4) - (-1)(12+16) - 1(-6-12) = 60 \neq 0;$$

$$|A|_1 = \begin{vmatrix} 4 & -1 & -1 \\ 11 & 4 & -2 \\ 11 & -2 & 4 \end{vmatrix} = 4(16-4) - (-1)(44+22) - 1(-22-44) = 180;$$

$$|A|_2 = \begin{vmatrix} 2 & 4 & -1 \\ 3 & 11 & -2 \\ 3 & 11 & 4 \end{vmatrix} = 2(44+22) - 4(12+6) - 1(33-33) = 60;$$

$$|A|_3 = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 4 \\ 3 & 4 & 11 \\ 3 & -2 & 11 \end{vmatrix} = 2(44+22) - (-1)(33-33) + 4(-6-12) = 60.$$

По теореме Крамера $x_1 = \dfrac{|A|_1}{|A|} = \dfrac{180}{60} = 3$; $x_2 = \dfrac{|A|_2}{|A|} = \dfrac{60}{60} = 1$; $x_3 = \dfrac{|A|_3}{|A|} = \dfrac{60}{60} = 1$. Для проверки результата подставим полученные значения неизвестных в каждое уравнение системы: $2 \cdot 3 - 1 - 1 \equiv 4$, $3 \cdot 3 + 4 \cdot 1 - 2 \cdot 1 \equiv 11$, $3 \cdot 3 - 2 \cdot 1 + 4 \cdot 1 \equiv 11$. Все уравнения обратились в тождества, значит, решение найдено верно.

5. Задание для практической работы:

Задание 1. Решить СЛАУ (в случае неопределенной системы выписывать общее и два любых частных решения).

1) $\begin{cases} x_1 + 2x_2 - 2x_3 = -1 \\ x_1 + 3x_2 - x_3 = 4 \\ -x_1 + 4x_3 = 6 \end{cases}$

2) $\begin{cases} x_1 + 2x_2 - 2x_3 = -1 \\ x_1 + 3x_2 - x_3 = 4 \\ -x_1 + 4x_3 = 4 \end{cases}$

3) $\begin{cases} x_1 - x_2 - x_3 = 1 \\ -3x_1 + 4x_2 + 4x_3 = -2 \\ 2x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 10 \end{cases}$

4) $\begin{cases} x_1 + 2x_2 - 2x_3 = -1 \\ x_1 + 3x_2 - x_3 = 4 \\ -2x_1 - x_2 + 8x_3 = 20 \end{cases}$

ПРАКТИЧЕСКОЕ ЗАНЯТИЕ №12

1.Тема:Действия над комплексными числами.

2.Количество часов: 2

3. Цель работы:научиться выполнять математические действия над комплексными числами.

4.Необходимые знания для выполнения задания:

Комплексными числами называются числа вида $a + bi$, где a и b — действительные числа, i — мнимая единица, определяемая равенством $i^2 = -1$.

Степени мнимой единицы:

$$i^2 = -1, \quad i^3 = -i, \quad i^4 = 1, \quad i^{4k} = 1, \quad i^{4k+1} = i,$$
$$i^{4k+2} = -1, \quad i^{4k+3} = -i, \quad k \in \mathbf{Z}^{1)}.$$

Два комплексных числа $a_1 + b_1 i$ и $a_2 + b_2 i$ называются ***равными***, если $a_1 = a_2$ и $b_1 = b_2$.

Сумма (разность) двух комплексных чисел $z_1 = a_1 + b_1 i$ и $z_2 = a_2 + b_2 i$ находится по формуле

$$z_1 \pm z_2 = (a_1 \pm a_2) + (b_1 \pm b_2)i.$$

Произведение двух комплексных чисел $z = a_1 + b_1 i$ и $z_2 = a_2 + b_2 i$ находится по формуле

$$z_1 \cdot z_2 = (a_1 a_2 - b_1 b_2) + (a_1 b_2 + a_2 b_1)\, i.$$

Частное двух комплексных чисел находится по формуле

$$\frac{a_1 + b_1 i}{a_2 + b_2 i} = \frac{(a_1 + b_1 i)(a_1 - b_1 i)}{(a_2 + b_2 i)(a_2 - b_2 i)} = \frac{a_1 a_2 + b_1 b_2}{a_2^2 + b_2^2} + \frac{a_2 b_1 + a_1 b_2}{a_2^2 + b_2^2}\, i.$$

Действия над комплексными числами можно производить по правилам действий над алгебраическими двучленами, принимая во внимание, что $i^2 = -1$.

5. Задание для практической работы:

Выполнить сложение и вычитание комплексных чисел.	
1	1) $z_1 = -3 + 5i,\ z_2 = 4 - 7i$; 2) $z_1 = -\frac{2}{3} + \frac{1}{4}i,\ z_2 = \frac{1}{4} + \frac{5}{6}i$; 3) $z_1 = -0{,}6 + 0{,}2i,\ z_2 = -0{,}4 - 0{,}5i$; 4) $z_1 = 3{,}6 + 0{,}2i,\ z_2 = 1{,}4 - 0{,}2i$; 5) $z_1 = 3 - 0{,}7i,\ z_2 = -3 + 0{,}7i$; 6) $z_1 = -1 + 3i,\ z_2 = 4 + 5i$.
Выполнить умножение комплексных чисел.	
2	1) $z_1 = 4 - 2i,\ z_2 = 3 + 8i$; 2) $z_1 = \frac{5}{6} + \frac{3}{4}i,\ z_2 = \frac{5}{6} - \frac{1}{4}i$; 3) $z_1 = \frac{7}{8} - \frac{1}{5}i,\ z_2 = \frac{3}{8} - \frac{1}{5}i$; 4) $z_1 = 1{,}5 - 2{,}1i,\ z_2 = 0{,}5 + 0{,}9i$; 5) $z_1 = \frac{3}{4} - \frac{1}{2}i,\ z_2 = \frac{1}{8} + \frac{3}{8}i$; 6) $z_1 = \frac{7}{8} - \frac{1}{2}i,\ z_2 = -\frac{1}{2}i$.
Выполнить деление комплексных чисел.	

3	1) $z_1 = 2 - 3i,\ z_2 = -4 + i$; 2) $z_1 = \frac{2}{3} - \frac{1}{4}i,\ z_2 = \frac{2}{3} + \frac{1}{4}i$; 3) $z_1 = \sqrt{5}\,i,\ z_2 = 4\sqrt{5}\,i$; 4) $z_1 = 5 - 3i,\ z_2 = 2i$; 5) $z_1 = -1 + 6i,\ z_2 = 6 - i$; 6) $z_1 = \frac{2}{3} - \frac{1}{3}i,\ z_2 = \frac{1}{3} + \frac{4}{3}i$; 7) $z_1 = 0{,}2 - 0{,}3i,\ z_2 = 0{,}5 + 0{,}4i$.

ПРАКТИЧЕСКОЕ ЗАНЯТИЕ №13

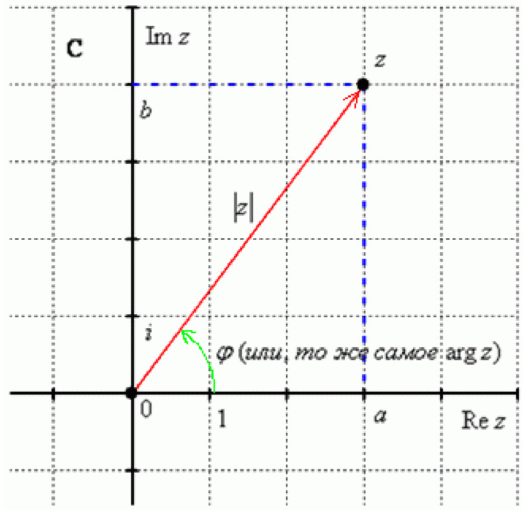
1.Тема: Форма комплексного числа.

2.Количество часов: 2

3. Цель работы:научиться переводить комплексные числа в разные формы.

4.Необходимые знания для выполнения задания:

Комплексными числами **называются числа вида $a + bi$, где a и b — действительные числа, i — мнимая единица, определяемая равенством $i^2 = -1$.**



Любое комплексное число (кроме нуля) $z = a + bi$ можно записать в тригонометрической форме:
$z = |z| \cdot (\cos\varphi + i\sin\varphi)$, где $|z|$ – это **модуль комплексного числа**, а φ – **аргумент комплексного числа**.

Изобразим на комплексной плоскости число $z = a + bi$ считаем, что $a > 0, b > 0$.

Модулем комплексного числа z называется расстояние от начала координат до соответствующей точки комплексной плоскости. Попросту говоря, **модуль – это длина** радиус-вектора.

Модуль комплексного числа z стандартно обозначают: $|z|$ или r

По теореме Пифагора легко вывести формулу для нахождения модуля комплексного числа: $|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$

Аргументом комплексного числа z называется **угол** φ между положительной полуосью действительной оси $\operatorname{Re} z$ и радиус-вектором, проведенным из начала координат к соответствующей точке. Аргумент не определён для единственного числа: $z = 0$.

Аргумент комплексного числа z стандартно обозначают: φ или $\arg z$

Из геометрических соображений получается следующая формула для нахождения аргумента:

$$\arg z = arctg\frac{b}{a}.$$

1) Если $a > 0$ (1-я и 4-я координатные четверти, или правая полуплоскость), то аргумент нужно находить по формуле $\arg z = arctg\frac{b}{a}$.

2) Если $a < 0, b > 0$ (2-я координатная четверть), то аргумент нужно находить по формуле $\arg z = \pi + arctg\frac{b}{a}.$

3) Если $a < 0, b < 0$ (3-я координатная четверть), то аргумент нужно находить по формуле

$$\arg z = -\pi + arctg\frac{b}{a}.$$

формула Муавра: Если комплексное число представлено в тригонометрической форме $z = |z| \cdot (\cos\varphi + i\sin\varphi)$, то при его возведении в натуральную степень n справедлива формула:

$$z^n = |z|^n \cdot (\cos(n\varphi) + i\sin(n\varphi))$$

Данная формула следует из **правила умножения комплексных чисел, представленных в тригонометрической форме**: чтобы найти произведение чисел $z_1 = |z_1| \cdot (\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1)$, $z_2 = |z_2| \cdot (\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2)$ нужно перемножить их модули и сложить аргументы:

$$z_1 \cdot z_2 = |z_1| \cdot |z_2| \cdot (\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + i\sin(\varphi_1 + \varphi_2))$$

5. Задание для практической работы:

Пример 1

Представить в тригонометрической форме комплексные числа: $z_1 = 1$, $z_2 = 2i$, $z_3 = -3$, $z_4 = -4i$.

Пример 2

Представить в тригонометрической форме комплексные числа: $z_1 = 3 + \sqrt{3}i$, $z_2 = -2 + 4i$, $z_3 = -2 - 2i$, $z_4 = 1 - \sqrt{3}i$.

Пример 3 Возвести в пятую степень комплексное число $z = 2 + 3i$

Пример 4 Дано комплексное число $z = 3 + \sqrt{3}i$, найти z^{20}.

ПРАКТИЧЕСКОЕ ЗАНЯТИЕ №14

1.Тема: Применение метода комплексных чисел для решения прикладных задач.

2.Количество часов: 2

3. Цель работы: научиться применять метод комплексных чисел при решении прикладных задач.

4.Необходимые знания для выполнения задания:

Любое действительное число a содержится в множестве комплексных чисел:

$$a = a + 0 \cdot i; \quad 0 = 0 + 0 \cdot i; \quad 1 = 1 + 0 \cdot i; \quad i = 0 + 1 \cdot i.$$

При $a = 0$ комплексное число обращается в чисто мнимое число bi.

Числа $a + bi$ и $a - bi$ называются ***комплексно сопряженными*** и обозначаются

$$\bar{z} = \overline{a + bi} = a - bi.$$

Комплексные числа $a + bi$ и $-a - bi$ называются ***противоположными.***

Модулем комплексного числа $z = a + bi$ называется число

$$|z| = |a + bi| = \sqrt{a^2 + b^2}.$$

5. Задание для практической работы:

Выполнить действия.	
1	1) $\frac{1}{i}$; 2) $\frac{1}{1-i}$; 3) $\frac{3-2i}{1+3i}$; 4) $\frac{(1+2i)(2+i)}{3-2i}$; 5) $\frac{2+3i}{(4+i)(2-2i)}$; 6) $\frac{(3+2i)(2-i)}{(2+3i)(1+i)}$; 7) $\frac{a+bi}{a-bi}$; 8) $\frac{\sqrt{5}+i}{\sqrt{5}-2i}$; 9) $\frac{1-3i}{-2+i} + \frac{1+4i}{-1+3i}$; 10) $\frac{a+bi}{a-bi} - \frac{a-bi}{a+bi}$.
Вычислить.	
2	1) $i^6 + i^{20} + i^{30} + i^{36} + i^{54}$; 2) $i + i^2 + i^3 + i^4 + i^5$; 3) $i \cdot i^2 \cdot i^3 \cdot i^4$; 4) $\frac{1}{i^3} + \frac{1}{i^5}$; 5) $\frac{1}{i^{13}} + \frac{1}{i^{23}} + \frac{1}{i^{33}}$.
3	1) $(1 - i)^8$; 2) $(1 + i)^{15}$; 3) $\left(\frac{-1 + \sqrt{2}i}{2}\right)^3$; 4) $(1 + i)^{-3}$; 5) $(1 - i)^{-12}$.

ПРАКТИЧЕСКОЕ ЗАНЯТИЕ №15

1.Тема: Основы комбинаторики.

2.Количество часов: 2

3. Цель работы: научиться решать задачи используя основные формулы комбинаторики.

4.Необходимые знания для выполнения задания:

Перестановки-соединения, которые можно составить из n предметов, меняя всеми возможными способами их порядок; Количество всех перестановок из n элементов обозначают $P_n = n!$ число их $P_n = 1*2*3*\ldots*n = n!$ Число n при этом называется *порядком* перестановки.

<u>Размещения</u> – соединения, содержащие по m предметов из числа n данных, различающихся либо порядком предметов, либо самими предметами; число их.

$A_n^m = \dfrac{n!}{(n-m)!}$ В комбинаторике **размещением** называется расположение “предметов” на некоторых “местах” при условии, что каждое место занято в точности одним предметом и все предметы различны.

<u>Сочетания</u>-соединения, содержащие по m предметов из n, различающиеся друг от друга, по крайней мере, одним предметом; число их $C_n^m = \dfrac{A_n^m}{P_m} = \dfrac{n!}{m!(n-m)!}$. Таким образом, количество вариантов при сочетании будет меньше количества размещений.

5. Задание для практической работы:

Решить задачи.

Задача № 1. Сколькими способами могут быть расставлены 8 участниц финального забега на 8-ти беговых дорожках?

Задача №2.Сколько четырехзначных чисел можно составить из цифр 1,2,3,4 если каждая цифра входит в изображение числа только один раз?

Задача № 3. Сколькими способами пятеро юношей могут пригласить пятерых из восьми девушек на танец?

Задача № 4. Сколько различных двузначных чисел можно составить из цифр 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 при условии, что в записи числа каждая цифра используется только один раз.

Задача №5 Сколькими способами из 10 человек можно выбрать комиссию, состоящую из 4 человек?

Задача № 6. В соревновании участвуют 12 команд. Сколько существует вариантов распределения призовых (1, 2, 3) мест?

Задача № 7. На соревнованиях по лёгкой атлетике нашу школу представляла команда из 10 спортсменов. Сколькими способами тренер может определить, кто из них побежит в эстафете 4×100 м на первом, втором, третьем и четвёртом этапах?

Задача № 8.Сколькими способами можно выложить в ряд красный, черный, синий и зеленый шарики?

Задача № 9. Учащимся дали список из 10 книг, которые рекомендуется прочитать во время каникул. Сколькими способами ученик может выбрать из них 6 книг?

ПРАКТИЧЕСКОЕ ЗАНЯТИЕ №16

1.Тема:Решение задач.

2.Количество часов: 2

3. Цель работы:научиться решать задачи используя основные формулы комбинаторики.

4.Необходимые знания для выполнения задания:

Перестановки-соединения, которые можно составить из n предметов, меняя всеми возможными способами их порядок; Количество всех перестановок из n элементов обозначают $P_n = n!$ число их $P_n = 1*2*3*\ldots*n = n!$ Число *n* при этом называется *порядком* перестановки.

Размещения – соединения, содержащие по m предметов из числа n данных, различающихся либо порядком предметов, либо самими предметами; число их.

$A_n^m = \dfrac{n!}{(n-m)!}$ В комбинаторике **размещением** называется расположение "предметов" на некоторых "местах" при условии, что каждое место занято в точности одним предметом и все предметы различны.

Сочетания-соединения, содержащие по m предметов из n, различающиеся друг от друга, по крайней мере, одним предметом; число их $C_n^m = \dfrac{A_n^m}{P_m} = \dfrac{n!}{m!(n-m)!}$. Таким образом, количество вариантов при сочетании будет меньше количества размещений.

5. Задание для практической работы:

1. Решить задачи.

1. Доказать тождество $C_n^k = C_n^{n-k}$.

2. Доказать тождество $C_n^k + C_n^{n-k} = C_{n+1}^{k+1}$.

3. Встретились и обменялись рукопожатиями десять старых друзей. Сколько всего было сделано рукопожатий?

4. На плоскости дано 12 точек, из которых никакие три не лежат на одной прямой. Сколько различных треугольников можно построить с вершинами в этих точках?

5. На плоскости дано 12 точек, из которых 4 лежат на одной прямой. Кроме того, из рассматриваемых точек никакие 3 не лежат на одной прямой. 1) Сколько различных прямых можно провести через эти точки? 2) Сколько можно построить различных треугольников с вершинами в этих точках?

2. Решить задачи с повторениями.

1. Две команды А и Б играют серию матчей по баскетболу до тех пор, пока одна из них не одержит четырех побед (ничьих в баскетболе нет). Сколько различных серий матчей может быть?

2. Сколькими способами можно переставить цифры числа 123589, чтобы между двумя четными цифрами стояли две нечетные.

3. Сколькими способами можно переставить буквы слова «змееед», чтобы три буквы «е» не шли подряд?

4. Сколькими способами можно переставить буквы в слове «шарага», чтобы две буквы «а» не стояли рядом?

ПРАКТИЧЕСКОЕ ЗАНЯТИЕ №17

1.Тема: Решение практических задач на определение вероятности события.

2.Количество часов: 2

3. Цель работы:научиться решать задачи на вычисление вероятности случайного события.

4.Необходимые знания для выполнения задания:

Операции над событиями

Суммой, или объединением, нескольких событий называется событие, состоящее в наступлении хотя бы одного из этих событий.

Сумма S событий $A, B, C, \ldots, N$ обозначается так:

$$S = A + B + C + \ldots + N.$$

Например, если событие A есть попадание в цель при первом выстреле, событие B — при втором, то событие $C = A + B$ есть попадание в цель вообще, безразлично, при каком выстреле — первом, втором или при обоих вместе.

Произведением, или пересечением, нескольких событий называется событие, состоящее в совместном появлении всех этих событий.

Произведение S событий $A, B, C, \ldots, N$ обозначается

$$S = ABC \ldots N.$$

Классическое определение вероятности случайного события

Для количественного сравнения событий по степени возможности их появления вводится числовая мера, которая называется вероятностью события.

Вероятностью события называется число, являющееся выражением меры объективной возможности появления события.

Вероятность события A будем обозначать символом $P\{A\}$.

Вероятность события A равна отношению числа случаев m, благоприятствующих ему, из общего числа n единственно возможных, равновозможных и несовместных случаев к числу n, т. е.

$$P\{A\} = \frac{m}{n}.$$

5. Задание для практической работы:

Решить задачи.

Задача 1. Абонент забыл последнюю цифру номера телефона и поэтому набирает её наугад. Определить вероятность того, что ему придётся звонить не более чем в 3 места.

Задача 2. Абонент забыл последние 2 цифры телефонного номера, но помнит, что они различны и образуют двузначное число, меньшее 30. С учетом этого он набирает наугад 2 цифры. Найти вероятность того, что это будут нужные цифры.

Задача 3. Шесть шаров случайным образом раскладывают в три ящика. Найти вероятность того, что во всех ящиках окажется разное число шаров, при условии, что все ящики не пустые.

Задача 4. На шахматную доску случайным образом поставлены две ладьи. Какова вероятность, что они не будут бить одна другую?

Задача 5. Шесть рукописей случайно раскладывают по пяти папкам. Какова вероятность того, что ровно одна папка останется пустой?

Задача 6. Цифры 1, 2, 3, …, 9, выписанные на отдельные карточки складывают в ящик и тщательно перемешивают. Наугад вынимают одну карточку. Найти вероятность того, что число, написанное на этой карточке: а) четное; б) двузначное.

Задача 7. На полке в случайном порядке расставлено 40 книг, среди которых находится трехтомник Пушкина. Найти вероятность того, что эти тома стоят в порядке возрастания номера слева направо, но не обязательно рядом.

Задача 8. На каждой из пяти одинаковых карточек напечатана одна из следующих букв: "а", "м", "р", "т", "ю". Карточки тщательно перемешаны. Найти вероятность того, что на четырех вынутых по одной карточке можно прочесть слово "юрта".

Задача 9. Ребенок имеет на руках 5 кубиков с буквами: А, К, К, Л, У. Какова вероятность того, что ребенок соберет из кубиков слово "кукла"?

ПРАКТИЧЕСКОЕ ЗАНЯТИЕ №18

1.Тема: Решение задач с реальными дискретными случайными величинами.

2.Количество часов: 2

3. Цель работы:научиться решать задачи на вычисление вероятности повторного и независимого испытания.

4.Необходимые знания для выполнения задания:

Испытания называются независимыми, если вероятность того или иного исхода каждого испытания не зависит от того, какие исходы имели другие испытания.

Независимые испытания могут проводиться как в одинаковых условиях, так и в различных. В первом случае вероятность появления некоторого события во всех испытаниях одна и та же, во втором случае она меняется от испытания к испытанию.

Примеры независимых повторных испытаний:

- выйдет из строя один из узлов прибора или два, три узла, причём выход из строя каждого узла не зависит от другого узла, а вероятность выхода из строя одного узла постоянна во всех испытаниях;
- произведённая в некоторых постоянных технологических условиях деталь, или три, четыре, пять деталей, окажутся нестандартными, причём одна деталь может оказаться нестандартной независимо от любой другой детали и вероятность того, что деталь окажется нестандатной, постоянна во всех испытаниях;
- из нескольких выстрелов по мишени один, три или четыре выстрела попадают в цель независимо от исходов других выстрелов и вероятность попадания в цель постоянна во всех испытаниях;
- при опускании монеты автомат сработает правильно один, два или другое число раз независимо от того, какой результат имели другие опускания монеты, и вероятность того, что автомат сработает правильно, постоянна во всех испытаниях.

Эти события можно описать одной схемой. Каждое событие наступает в каждом испытании с одной и той же вероятностью, которая не изменяется, если становятся известными результаты предыдущих испытаний. Такие испытания называются независимыми, а схема называется *схемой Бернулли*. Предполагается, что такие испытания могут быть повторены как угодно большое количество раз.

Если вероятность p наступления события A в каждом испытании постоянна, то вероятность $P_{m,n}$ того, что в n независимых испытаниях событие A наступит m раз, находится по *формуле Бернулли*:

$P_{m,n} = C_n^m p^m q^{n-m}$ (где $q = 1 - p$ - вероятность того, что событие не наступит)

или

$$P_{m,n} = \frac{n!}{m!(n-m)!} p^m q^{n-m}.$$

Поставим задачу – найти вероятность того, что событие такого типа в n независимых испытаниях наступит m раз.

5. Задание для практической работы:

1. В первом загоне находятся 10 овец, из которых 2 — белые, остальные — черные, а во втором загоне — 7 белых и 3 черных овцы. Между загонами есть переход, и одна из овец первого загона перешла во второй. Переход закрыли и из второго загона отобрали одну овцу для стрижки. Какова вероятность того, что пойманная овца оказалась из первого загона, если известно, что она белая?

2. В трех коробках лежат конфеты «Белочка», произведенные на двух фабриках «Рассвет» и «Заря». В первой коробке 30% конфет фабрики «Заря», во второй — 40%, а в третьей — 50%. Наугад выбрали коробку и из нее наугад вынули конфету. Какова вероятность, что извлеченная конфета была а) из первой коробки, б) из второй коробки, в) из третьей коробки, если известно, что она оказалась произведенной на фабрике «Заря»?

3. В десяти ящиках упаковано по 100 одинаковых по форме латунных и бронзовых шариков, причем доля латунных шариков образует арифметическую прогрессию с начальным количеством m_0=10 латунных шариков в первом ящике и разностью также d=10 шариков, так что в ящике № 2 — 20 латунных шариков, в ящике № 3 — 30 и т.д. Наудачу выбранный шарик оказался латунным. Какова вероятность, что он был извлечен а) из ящика № 2? б) из ящика № 8? Все ящики по виду неотличимы.

ПРАКТИЧЕСКОЕ ЗАНЯТИЕ №19

1.Тема: Характеристики случайной величины.

2.Количество часов: 2

3. Цель работы:научиться вычислять элементы математической статистики.

4.Необходимые знания для выполнения задания:

Пример 1: Прибыл вагон с пшеницей и требуется определить количество (долю) клейковины в ее зернах. Все зерна вагона называются генеральной совокупностью. Однако исследованию будут подвергнуты не все зерна, а какая-то их часть. Эта часть называется ***выборочной совокупностью****, или просто* ***выборкой****. Понятно, что выборка должна хорошо отражать свойства всей пшеницы вагона, т.е. должна быть* ***репрезентативной****. Например, если для исследования одного вагона взяли десяток зерен из одной точки вагона, а для исследования другого вагона взяли пять проб по сто зерен из разных точек вагона, то вторая выборка очевидно более репрезентативна, чем первая.*

Пример 2: Обувная фабрика планирует выпуск зимней мужской обуви. Обувщикам нужно знать, сколько процентов мужчин носят каждый из существующих размеров обуви. Здесь генеральная совокупность — все мужчины — возможные покупатели обуви. Однако исследование проводится на выборке, скажем, из 50 случайно отобранных мужчин. Прежде чем приступить к исследованию, данные по признаку — размер обуви — располагают в порядке неубывания или невозрастания признака. Такой ряд чисел называют ***вариационным****. Пусть, например, в результате уличного опроса получился ряд из 50 размеров мужской обуви (см. табл. 14.1).*

Таблица 14.1

25	21	20	27	31	32	25	26	28	28	31	27	24	25	27
21	25	26	26	28	27	27	30	27	31	30	29	29	27	26

28	27	26	25	28	29	27	26	22	23
30	25	24	23	32	28	27	26	27	26

Построим вариационный ряд по возрастанию признака (табл. 14.2).

Таблица 14.2

20	21	21	22	23	23	24	24	25	25	25	25	25	25	26
27	27	27	27	27	27	27	27	28	28	28	28	28	28	29

26	26	26	26	26	26	26	27	27	27
29	29	30	30	30	31	31	31	32	32

Пользуясь вариационным рядом, легко построить уже знакомую нам таблицу распределения случайной величины по ее абсолютным частотам (табл. 14.3, первые две строчки) и по ее относительным частотам (табл. 14.3, третья строка).

Таблица 14.3

X — исследуемый признак (размер)	20	21	22	23	24	25	26	27
m — частота	1	2	1	2	2	6	8	11
$w = \frac{m}{n}$ — относительная частота	0,02	0,04	0,02	0,04	0,04	0,12	0,16	0,22

28	29	30	31	32	Контроль
6	3	3	3	2	$\sum m_i = 50 = n$
0,12	0,06	0,06	0,06	0,04	$\sum w_i = 1$

Введем ряд важных понятий, используемых в статистике, на примере вариационного ряда табл. 14.2.

Размахом выборки *R* называется разность между ее наибольшим и наименьшим значениями. В данном случае $R = 32 - 20 = 12$.

Модой выборки *Мо* называется значение случайной величины, встречающееся в выборке чаще всего. В данном случае $Mo = 27$.

Медианой выборки *Ме* называется среднее число (т.е. стоящее на среднем месте в выборке), если количество чисел нечетное и среднее арифметическое двух срединных чисел, если их количество в выборке четное. В нашем примере на 25 и 26 местах стоит размер 27,

значит, $Me = \frac{27+27}{2} = 27$.

Средним значением $\overline{X}$ выборки X называется среднее арифметическое всех ее значений: $\overline{X} = \frac{x_1 + x_2 + \ldots x_n}{n}$. В нашем примере:

$$X = \frac{20 + 21 + 21 + 22 + 22 + \ldots + 32 + 32}{50} =$$

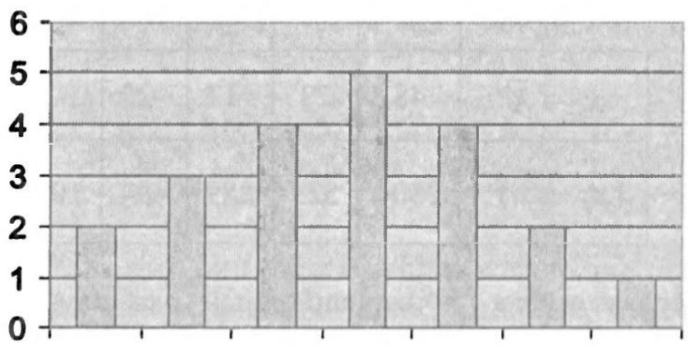
$$= \frac{20 \cdot 1 + 21 \cdot 2 + 22 \cdot 1 + 23 \cdot 2 + 24 \cdot 2 + 25 \cdot 6 + 26 \cdot 8 + 27 \cdot 11 + 28 \cdot 6 + 31 \cdot 3 + 32 \cdot 2 + 29 \cdot 3 + 30 \cdot 3}{50} =$$

$$= \frac{1335}{50} = 26{,}7.$$

5.

Задание для практической работы:

1. Жалобы на опоздания электричек, поступившие в диспетчерскую станции Семафорово в течение недели, позволили составить следующую диаграмму частот по опозданиям за неделю:



Определите среднее число опозданий в день за неделю и среднеквадратичное отклонение.

2. На стройку с кирпичного завода привезли 20 упаковок кирпича. Чтобы проверить качество партии, из каждой упаковки вытащили случайным образом по кирпичу и замерили длину каждого. Ниже представлены полученные величины (в см): 20,5; 20,1; 21,3; 20,3; 19,8; 19,2; 20,1; 19,6; 20,2; 20; 20,5; 19,7; 19,9; 20,5; 19,6; 20,1; 19,4; 19,8; 19,1; 20,3.

а) Определите среднюю длину кирпича.

б) Найдите величину среднеквадратичного отклонения длины кирпича от средней.

в) Какой процент кирпичей, длина которых отличается от средней больше, чем на 0,2 см? Больше чем на величину среднеквадратичного отклонения?

3. Пасечник заметил, что пчелы в двух его ульях производят мед неравномерно. Раз в 10 дней он вынимал соты из улья и заносил в таблицу массу (в кг) снятого меда, выработанного пчелами за десять дней.

а) Пчелы какого из ульев работают более стабильно? (Сделайте вывод, вычислив величину среднеквадратичного отклонения количества произведенного меда.)

б) Если в первом улье живет 100 пчел, а во втором 75 пчел, то сколько в среднем произвела меду за период с 19 по 28 августа каждая пчела 1 и 2 улья?

Интервалы времени	Масса меда (в кг)	
	1-й улей	2-й улей
С 20 по 30 апреля	11,4	11,9
С 1 апреля по 10 мая	12	10,8
С 11 по 20 мая	11,5	13,2
С 21 по 30 мая	11,7	12,6
С 31 мая по 9 июня	11	11,1
С 10 по 19 июня	10,6	11,4
С 20 по 29 июня	13,1	13,2
С 30 июня по 9 июля	12.8	12,9
С 10 по 19 июля	11,9	13,5
С 20 по 29 июля	13	10,9
С 30 июля по 8 августа	12,5	12,3
С 9 по 18 августа	12,9	11,7
С 19 по 28 августа	11,6	12
С 29 августа по 8 сентября	12	10,5

4. Литература

Основные источники:

1. Богомолов Н.В. Математика: Учебник для ссузов. М.: Дрофа, 2019.
2. Богомолов Н.В. Сборник задач по математике: Учебное пособие для ссузов. М.: Дрофа, 2019.

Интернет ресурсы:

1. Единое окно доступа к образовательным ресурсам. Электронная библиотека [Электронный ресурс]. — Режим доступа: http://window.edu.ru/window, свободный. — Загл. с экрана.
2. Российская национальная библиотека [Электронный ресурс]. — Режим доступа: http:// nlr.ru/lawcenter, свободный. — Загл. с экрана.
3. Электронные библиотеки России /pdf учебники студентам [Электронный ресурс].— Режим доступа: http://www.gaudeamus.

Дополнительные источники:

1. Матвеев Н.М. Сборник задач и упражнений по обыкновенным дифференциальным уравнениям: Учебное пособие, 7-е изд., доп.- СПб.: Издательство «Лань», 2002. –432 с. – (Учебники для вузов. Специальная литература).
2. Выгодский М.Я. Справочник по высшей математике. -М.: Наука, 1987.
3. Ляшко И.И., Боярчук А.К., Гай Я.Г., Головач Г.П. Справочное пособие по высшей математике. Т.1: Математический анализ: введение в анализ, производная, интеграл. – М.: Едиториал УРСС, 2004. – 360 с.
4. Спирина М.С. Теория вероятностей и математическая статистика: учебник для студ. учреждений сред. проф. образования / М.С. Спирина, П.А. Спирин. – М.: Издательский центр «Академия», 2013. – 352 с.